



**ANALYSIS OF THE BUCKLING DELAMINATION OF A RECTANGULAR SANDWICH THICK PLATE WITH BAND CRACKS**

**Ayfer TEKİN\***

*Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Esenler-İSTANBUL*

**Received/Geliş: 11.10.2010 Revised/Düzelme: 28.01.2011 Accepted/Kabul: 11.02.2011**

---

**ABSTRACT**

In this study, a buckling delamination problem of a rectangular sandwich thick plate is investigated. It is assumed that the sandwich plate is composed of two face layers and a core layer. It is also assumed that face and core layers are made of different materials which are isotropic and homogeneous. It is assumed that there are two same band cracks at the interfaces between the layers and edge-surfaces of these cracks, which have initial infinitesimal imperfections. The evolution of the mentioned initial imperfections with an external compressive loading acting along the cracks is investigated within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrically nonlinear field equations of the theory of elasticity. For the determination of the values of the critical force as well as the buckling delamination mode, the initial imperfection criterion is used. The corresponding boundary value problems are solved by employing boundary form perturbation techniques and finite elements method (FEM). The influence of the parameters pertaining to the material and the geometry of the plate on the critical values is investigated.

**Keywords:** Buckling delamination, sandwich plate, band crack, 3D FEM.

**BANT ÇATLAKLAR İÇEREN SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞA AİT DELAMİNASYON BURKULMA ANALİZİ**

**ÖZET**

Bu çalışmada, sandviç dikdörtgen kalın plağın delaminasyon burkulma problemi incelenmiştir. Sandviç kalın plağın iki dış ve bir çekirdek tabakasından oluştuğu kabul edilmektedir. Ayrıca, dış ve çekirdek tabakalarının izotrop ve homojen olan farklı malzemeden yapıldığı kabul edilmektedir. Plağın katmanları arasında, birbirinin aynı iki adet bant çatlakların bulunduğu ve bu çatlakların yüzeylerinin başlangıçta çok küçük bir eğrilige sahip olduğu kabul edilmiştir. Çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı dış basınç kuvveti etkisinde bu eğriliklerin gelişimi, üç boyutlu Elastisite Teorisinin geometrik lineer olmayan alan denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmiştir. Kritik kuvvet değeri ile birlikte, burkulma modunun da belirlenmesi için 'başlangıç eğinti kriteri' kullanılmıştır. Uygun sınır değer problemleri, sınır tipli pertürbasyon tekniği ve sonlu elemanlar yöntemi (FEM) uygulanarak çözülmüştür. Plağın malzeme ve geometrik parametrelerinin kritik değerlere etkisi incelenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Delaminasyon burkulması, sandviç plak, bant çatlak, 3D FEM.

---

\* e-mail/e-ileti: atekin@yildiz.edu.tr, tel: (212) 383 51 47

## 1. GİRİŞ

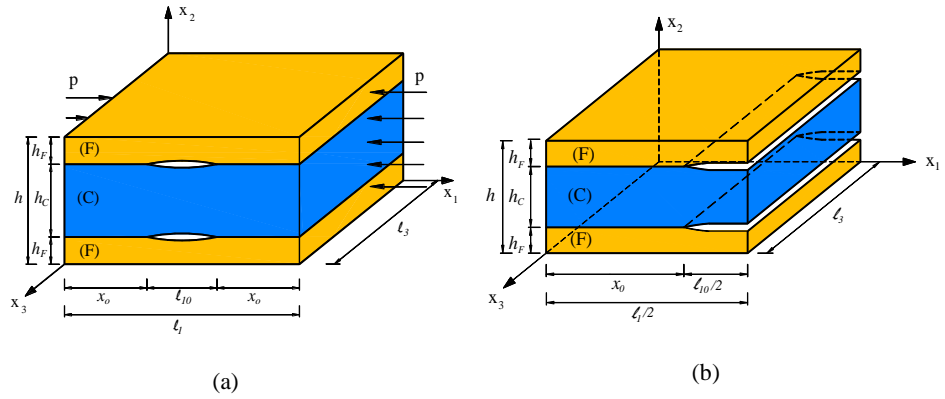
Çeşitli dış etkiler altında malzemenin veya yapı elemanlarının kırılması problemleri, mühendislik problemlerinin önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Griffith'in [1-2] deneysel çalışmalarında, cisimlerdeki kırılmanın bu cisimlerin içerisinde kaçınılmaz olarak bulunabilen çatlak, yarık vb. kusurlar nedeniyle olabileceği hipotezi öne sürülmüştür. Bu hipotez, bu alanda sonraki çalışmaların temelini oluşturmuştur.

Kompozit malzemeler mekaniği açısından, malzemede mevcut olan çatlak/çatlaklar doğrultusundaki dış basınç kuvveti etkisinde, malzemenin kırılmasına ait problemler geniş yer tutar. Bu problemlerin bir kısmı, çatlak ile yapı elemanının serbest yüzeyi arasında kalan kısmın stabilite kaybı-burkulma problemleri olarak modellenir ve bu problemlere delaminasyon burkulma problemleri adı verilir. Bu problemlere ait ilk çalışmalar Kachanov [3] tarafından yapılmıştır. Bu araştırmanın özeti [4-7] çalışmalarında verilmiştir. Bu çalışmalarda yapıda çatlak olduğu ve çatlak doğrultusunda dış basınç kuvvetinin etki ettiği kabul edilmektedir. Bu durumda delaminasyon burkulma problemi; çatlak ve yapı elemanının serbest yüzeyi arasında kalan kısmın dış basınç kuvveti etkisinde stabilite kaybı olarak modellenmektedir. Problemin çözümü, yaklaşık plak teorileri çerçevesinde yapılmıştır. Bu çalışmalar, çatlak ile plağın serbest yüzeyi arasında kalan kısmın kalınlığının, çatlak uzunluğundan büyük veya eşit olduğu durumda geçerli değildir. [8-11] çalışmalarında, çatlakın geometrik boyutlarının kritik delaminasyon burkulma değerine etkileri, yaklaşık plak teorileri çerçevesinde çözülmüştür. Ele alınan problemlerin daha kesin teoriler çerçevesinde modellenmesi ve çözümüne ait bazı çalışmalar [12-15] de verilmiştir. Bu çalışmalarda ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin çözümü için Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) geliştirilmiş ve bazı problemlere uygulanmıştır. LEÜBST'nin mekanik özellikleri zamana bağlı yani, viskoelastik malzemeler için geliştirilmesi Akbarov ve öğrencileri tarafından yapılmıştır [16-21]. Belirtilen çalışmalarda, viskoelastik malzemenin yapılmış şerit-plak veya dairesel kompozit plakların delaminasyon burkulma problemleri, iki boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. [22] kaynağında ise, belirtilen problemler dikdörtgen sandviç kalın plaklar için geliştirilmiştir. Belirtilen çalışmada, üç tabakadan oluşan sandviç kalın plak ele alınmıştır. Sandviç plağın dış tabakalarının aynı malzemenin yapıldığı, fakat çekirdek tabakasının farklı malzemenin yapıldığı kabul edilmiştir. Dış tabakalar ile çekirdek tabakası arasında çatlakların bulunduğu ve çatlak yüzeylerinin başlangıçta çok küçük eğriliğe sahip olduğu kabul edilmiştir. Çatlaklar doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvveti etkisinde, çatlak yüzeylerindeki ön eğriliğin büyüyerek sonsuza gitmesi durumundan yararlanılarak, kritik parametre değerleri elde edilmiştir.

Ele alınan çalışmada, [22] çalışmasında incelenen delaminasyon burkulma problemleri, sandviç plağın dış tabakalarının malzemesinin çekirdek tabakası malzemesinden daha zayıf seçilmesi durumları için araştırılmıştır. Dolayısıyla ele alınan çalışma, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde şekil değiştirebilen cisimler mekaniğine ait doğrusallaştırılmış üç boyutlu elastisite teorisi yardımıyla matematiksel modellenen sınır değer probleminin, üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal çözümünü içermektedir. Çeşitli problem parametrelerinin kritik delaminasyon burkulma yüküne ve burkulma moduna etkisi, ele alınan durum için detaylı şekilde incelenmiştir.

## 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Bu çalışmada ele alınan yapı elemanı, dört kenarından basit mesnetli, üç katmandan oluşan ve katmanlar arasında birbirine eşit uzunlukta paralel iki bant çatlak içeren, sandviç kalın plak olarak verilebilir. Plağın, çatlaklar doğrultusunda karşılıklı iki kenarından etkiyen düzgün yayılı statik basınç yükü etkisinde olduğu kabul edilmektedir. Yükleme durumu ve geometrik boyutlar Şekil 1'de gösterilmektedir. Ele alınan plağa bağlı  $Ox_1x_2x_3$  kartezyen koordinat takımı, plağın yüklenmeden önceki durumunu belirten Lagrange koordinatları ile ilişkilendirilmiştir.



Şekil 1. Ele alınan kalın plak geometrisi ve yükleme durumu; a) bütün bölge b) yarım bölge

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi,

$$V' = V - \Omega_1 - \Omega_2 \quad (1)$$

dir. (1)'de,

$$V = V^{(r_1)} \cup V^{(r_2)} \cup V^{(r_3)},$$

$$V^{(r_1)} = \{0 < x_1 < l_1; 0 < x_2 < h_F; 0 < x_3 < l_3\},$$

$$V^{(r_2)} = \{0 < x_1 < l_1; h_F < x_2 < h_F + h_C; 0 < x_3 < l_3\},$$

$$V^{(r_3)} = \{0 < x_1 < l_1; h_F + h_C < x_2 < h; 0 < x_3 < l_3\},$$

$$\Omega_1 = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F; 0 < x_3 < l_3\},$$

$$\Omega_2 = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C; 0 < x_3 < l_3\} \quad (2)$$

dir. (2)'de  $\ell_{10}$  çatlakın  $Ox_1$  doğrultusundaki uzunluğudur. Şekil 1'de dış tabakalar  $F$  harfi, iç tabaka ise  $C$  harfi ile gösterilmiştir.

Çatlak yüzeylerinin önceden çok küçük eğriliğe sahip olduğu ve bu eğriliklerin alt çatlak (üst çatlak) için  $x_1 = \ell_1/2$  ve  $x_2 = h_F$  ( $x_1 = \ell_1/2$  ve  $x_2 = h_F + h_C$ ) düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Alt ve üst çatlak yüzeylerinin denklemleri,

$$x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1), \quad x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1),$$

$$(\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2, \quad 0 < x_3 < l_3 \quad (3)$$

şeklinde verilmektedir. Burada  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğriliğin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre ve  $f(x_1)$  çatlak yüzeylerinde yüklemmeden önce var olduğu kabul edilen küçük eğriliğin formunu gösteren fonksiyondur.  $f$  fonksiyonunun üst indisinde bulunan '+' ('-'), çatlakın üst (alt) yüzeyini ifade etmektedir.  $f(x_1)$  fonksiyonunun aşağıdaki eşitliklerini sağladığı kabul edilmektedir:

$$f^+(x_1) = -f^-(x_1),$$

$$f^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2) = f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2) = 0,$$

$$\frac{df^{\pm}((\ell_1 - \ell_{10})/2)}{dx_1} = \frac{df^{\pm}((\ell_1 + \ell_{10})/2)}{dx_1} = 0. \quad (4)$$

Matematiksel formülasyonda çekirdek tabaka ve dış tabakalar ile ilgili değerler sırasıyla üst indis (1) ve (2) ile gösterilecektir. Aynı zamanda üst indis  $r_k$  ( $k=1,2,3$ ) kullanılmıştır. Burada  $r_1$  ve  $r_3$  sırasıyla alt ve üst dış tabakalarla ilgili büyüklükleri,  $r_2$  ise çekirdek tabakası ile ilgili büyüklükleri belirtmektedir. Böylece  $r_1 = r_3 = 2$ ,  $r_2 = 1$  olarak yazılabilir. Ele alınan problemin matematiksel modeli, üç boyutlu elastisite teorisinin geometrik doğrusal olmayan denklemleri yardımıyla verilebilir. Buna göre;

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{jn}^{(r_k)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad (5)$$

geometrik ilişkiler

$$\varepsilon_{ij}^{(r_k)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(r_k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_j} \right), \quad (6)$$

bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(r_k)} = \lambda^{(r_k)} \theta^{(r_k)} \delta_i^j + 2\mu^{(r_k)} \varepsilon_{ij}^{(r_k)}, \quad \theta^{(r_k)} = \varepsilon_{11}^{(r_k)} + \varepsilon_{22}^{(r_k)} + \varepsilon_{33}^{(r_k)} \quad (7)$$

olur. Yukarıdaki ifadelerde  $i, j, n; k=1,2,3$ ,  $r_1 = r_3 = 2$ ,  $r_2 = 1$  dir. Ayrıca  $\lambda^{(r_k)}$  ve  $\mu^{(r_k)}$  malzemenin mekanik sabitlerini ifade etmektedir. Dört kenarından basit mesnetle tutturulmuş plak bölgesinde sağlanan sınır koşulları;

$$\begin{aligned} u_2^{(r_k)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, & u_2^{(r_k)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, \\ \left[ \sigma_{1n}^{(r_k)} \left( \delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= p, & \left[ \sigma_{1n}^{(r_k)} \left( \delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, \\ \left[ \sigma_{3n}^{(r_k)} \left( \delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, & \left[ \sigma_{3n}^{(r_k)} \left( \delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

plağın alt ve üst serbest yüzeylerindeki sınır koşulları

$$\left[ \sigma_{2n}^{(r_1)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left[ \sigma_{2n}^{(r_3)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=h} = 0, \quad (9)$$

çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları

$$\begin{aligned} \left[ \sigma_{jn}^{(r_1)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^- &= 0, & \left[ \sigma_{jn}^{(r_2)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_1^+} n_j^+ &= 0, \\ \left[ \sigma_{jn}^{(r_2)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_2^+} n_j^+ &= 0, & \left[ \sigma_{jn}^{(r_3)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_2^-} n_j^- &= 0, \end{aligned}$$

$$S_1^\pm = \left\{ \left( (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1), 0 < x_3 < \ell_3 \right\},$$

$$S_2^\pm = \left\{ \left( (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1), 0 < x_3 < \ell_3 \right\} \quad (10)$$

şeklinde verilmiştir. Burada  $n_j^+$  ( $n_j^-$ ) çatlakın üst (alt) yüzeyine ait dış birim normal vektörün bileşenlerini göstermektedir.

Tabakalar arasındaki ideal temas koşulları;

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\varphi_1^+} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad u_i^{(r_3)} \Big|_{\varphi_2^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_2^-},$$

$$\left[ \sigma_{2n}^{(r_1)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_1^-} = \left[ \sigma_{2n}^{(r_2)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_1^+},$$

$$\left[ \sigma_{2n}^{(r_3)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_2^+} = \left[ \sigma_{2n}^{(r_2)} \left( \delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_2^-},$$

$$\wp_1^\pm = \left\{ x_1 \in \left( (0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right), x_2 = h_F \pm 0, x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\wp_2^\pm = \left\{ x_1 \in \left( (0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right), x_2 = h_F + h_C \pm 0, x_3 \in (0, \ell_3) \right\} \quad (11)$$

olarak verilebilir. Böylece ele alınan sınır değer problemi,  $x_1 = 0; \ell_1$  ile  $x_3 = 0; \ell_3$  kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş,  $x_1 = 0; \ell_1$  yanal yüzeylerinden şiddeti  $p$  olan düzgün yayılı basınç yükü etkisindeki sandviç kalın plağın, delaminasyon burkulma problemini temsil etmektedir.

(5)-(11) ile verilen ifadeler doğrusal olmayan sınır değer problemini göstermektedir. Problemin çözümü, (5)-(11) matematiksel modelinin doğrusallaştırılması ile elde edilen ‘‘Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi’’ denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu denklem takımının doğrusallaştırılması için boyutsuz küçük parametre  $\varepsilon$ ’dan yararlanılmıştır [12,18,22].

### 3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

(3) ile verilen, çatlak yüzeylerine ait  $x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1)$  ve/veya  $x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1)$  denklemlerinden yararlanılarak, çatlak yüzeylerine ait dış normal vektörün bileşenleri  $n_j^\pm$  için

$$n_1^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left( \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2}}, \quad n_2^\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left( \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2}}, \quad n_3^\pm = 0 \quad (12)$$

yazılabilir. Burada,  $\varepsilon^2 \left[ \left( \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2 \right] \ll 1$  olduğu kabul edilirse, (12) ile verilen ifadeler  $\varepsilon$  cinsinden kuvvet serisi ile ifade edilebilir:

$$n_1^\pm = \pm \left( \varepsilon \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} - \varepsilon^3 \left( \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^3 + \dots \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1),$$

$$n_2^\pm = \pm \left( 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2 + \dots \right) = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1), \quad n_3^\pm = 0. \quad (13)$$

Diğer taraftan, [16-22] çalışmalarına dayanarak aranan büyüklükler, küçük parametre  $\varepsilon$  'na göre seri formda

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_k)}; \varepsilon_{ij}^{(r_k)}; u_i^{(r_k)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_k),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_k),q}; u_i^{(r_k),q} \right\}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (14)$$

temsil edilebilir. (14) ifadeleri (5)-(11) ifadelerinde yerine yazılır ve  $\varepsilon$  'nun kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş kapalı denklemler sistemi ile sınır ve temas koşulları elde edilir.  $\varepsilon$  'nun derecesine göre elde edilen her bir sınır değer problemi, anlaşılır olması açısından,  $\varepsilon$  'un derecesine göre isimlendirilir: Örneğin,  $\varepsilon^0$  için elde edilen sınır değer problemine, sıfıncı yaklaşım (veya sınır değer problemi);  $\varepsilon^1$  için elde edilen sınır değer problemine, birinci yaklaşım (veya sınır değer problemi) vb. olarak isimlendirilmektedir. Aranan çözüm, bu seri-sınır değer problemlerinin çözülmesi ve bütün çözümlerin süperpoze edilmesi ile elde edilir. Elde edilen her bir yaklaşım, kendinden önceki yaklaşımlara ait bütün büyüklükleri içermektedir.

Ele alınan cisim sert-katı cisim olduğundan, bilinen mekanik görüşler doğrultusunda

$$\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_n} \approx \delta_i^n \text{ alınabilir. Bu ilişki ve ele alınan sınır değer problemi göz önüne alındığında,}$$

sıfıncı yaklaşımın çözümü,

$$\sigma_{11}^{(k),0} = p, \quad \sigma_{ij}^{(k),0} = 0 \quad (ij \neq 11) \quad (15)$$

olarak yazılabilir. Birinci yaklaşıma ait sırasıyla, denge denklemleri, geometrik ilişkiler ve bünye bağıntıları,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \sigma_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial^2 u_i^{(r_k),1}}{\partial x_1^2} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(r_k),1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(r_k),1}}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij}^{(r_k),1} = \lambda^{(r_k)} \theta^{(r_k),1} \delta_i^j + 2\mu^{(r_k)} \varepsilon_{ij}^{(r_k),1}, \quad (16)$$

sınır koşulları,

$$u_2^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad u_2^{(r_k),1} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0, \quad \left[ \sigma_{11}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial u_1^{(r_k),1}}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad \sigma_{13}^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad \sigma_{31}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = \sigma_{33}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \quad (17)$$

$$\sigma_{21}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \sigma_{23}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{21}^{(r_5),1} \Big|_{x_2=h} = \sigma_{22}^{(r_5),1} \Big|_{x_2=h} = \sigma_{23}^{(r_5),1} \Big|_{x_2=h} = 0, \quad (18)$$

$$\sigma_{21}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{s}_1^-} = -\sigma_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{s}_1^-} = \sigma_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{s}_1^-} = 0,$$

$$\sigma_{21}^{(r_5),1} \Big|_{\bar{s}_1^+} = -\sigma_{11}^{(r_5),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(r_5),1} \Big|_{\bar{s}_1^+} = \sigma_{23}^{(r_5),1} \Big|_{\bar{s}_1^+} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_2^-} &= -\sigma_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_2^-} = \sigma_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_2^-} = 0, \\ \sigma_{21}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_2^+} &= -\sigma_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_2^+} = \sigma_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_2^+} = 0, \\ \bar{S}_1^\pm &= \left\{ \left( (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F \pm 0, \quad 0 < x_3 < \ell_3 \right\}, \\ \bar{S}_2^\pm &= \left\{ \left( (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0, \quad 0 < x_3 < \ell_3 \right\}, \end{aligned} \tag{19}$$

temas koşulları,

$$\begin{aligned} u_i^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= u_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad u_i^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} = u_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-}, \\ \left[ \sigma_{21}^{(r_1),1} + \sigma_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial u_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^-} &= \left[ \sigma_{21}^{(r_2),1} + \sigma_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^+}, \quad \sigma_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} = \sigma_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad \sigma_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} = \sigma_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \\ \left[ \sigma_{21}^{(r_3),1} + \sigma_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial u_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^+} &= \left[ \sigma_{21}^{(r_2),1} + \sigma_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^-}, \quad \sigma_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} = \sigma_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-}, \quad \sigma_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} = \sigma_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-} \end{aligned} \tag{20}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadelerde  $\sigma_{jn}^{(r_k),0}$  sıfırncı yaklaşıma ait gerilmeleri göstermektedir. Benzer şekilde, ikinci ve sonraki yaklaşımlara ait formülasyon elde edilebilir. Böylece ele alınan delaminasyon burkulma problemi, sıfırncı yaklaşım, birinci yaklaşım, vb. şeklindeki seri-sınır değer problemlerinin ardışık incelenmesine dönüştürülmüş olur. [16-22] çalışmalarından da görüldüğü üzere, birinci yaklaşım ((16)-(20) sınır değer problemi) ve sonraki yaklaşımlardaki denklem ve ifadelerde, eşitliğin sol tarafları ‘Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi’ (LEÜBST) denklemleri ile çakışmaktadır.

Ele alınan üç katmandan oluşan sandviç kalın plağın kritik delaminasyon burkulma değeri, çatlak yüzeyindeki küçük ön eğriliğin, dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesi özelliğinden belirlenmiştir [23]. Kritik parametre değerlerinin belirlenmesinde elde edilen seri-sınır değer problemlerinden sadece sıfırncı ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterlidir. Çünkü diğer bütün yaklaşımlarda, temel denklemlerin sol tarafı, birinci yaklaşım ile üst üste çakışmakta, sadece homojen olmayan kısmı farklılaşmaktadır. Kritik dış basınç kuvveti, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitliğinden belirlendiği için 2. ve sonraki yaklaşımlar kritik delaminasyon burkulma değerini değiştirmemektedir. İkinci ve sonraki yaklaşımların göz önüne alınması, gerilme yayılımının hassaslaştırılmasında etkindir. Ele alınan çalışmada amacımız kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerinin belirlenmesi olduğu için, hesaplamalar sıfırncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde sınırlandırılmıştır.

#### 4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Sıfırncı yaklaşımın çözümü (15) ile verilmiştir. Birinci yaklaşıma ait çözümün elde edilebilmesi için, (16)-(20) ile verilen sınır değer probleminin çözülmesi gerekmektedir. Birinci yaklaşıma ait çözüm için kullanılan sonlu eleman formülasyonunun belirlenmesinde, aşağıda verilen fonksiyonel ve Ritz tekniği kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} \Pi(u_1^{(r_k),1}, u_2^{(r_k),1}, u_3^{(r_k),1}) &= \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{2} \iiint_V \left( \sigma_{11}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial u_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. \sigma_{12}^{(r_k),1} \frac{\partial u_1^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(r_k),1} \frac{\partial u_1^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \right. \end{aligned}$$

$$\left( \sigma_{21}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial u_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(r_k),1} \frac{\partial u_2^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(r_k),1} \frac{\partial u_1^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \left( \sigma_{31}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial u_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(r_k),1} \frac{\partial u_3^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(r_k),1} \frac{\partial u_2^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \sigma_{33}^{(r_k),1} \frac{\partial u_3^{(r_k),1}}{\partial x_3} \Big] dx_1 dx_2 dx_3 - \int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} u_1^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} u_1^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} u_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)-0} dx_1 dx_3 - \int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} u_1^{(r_3),1} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)+0} dx_1 dx_3 . \quad (21)$$

(21) fonksiyonelinin yer değiştirmelere gre birinci varyasyonunun sifira eşitiliğinden yani,

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial u_1^{(r_k)}} \delta u_1^{(r_k)} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2^{(r_k)}} \delta u_2^{(r_k)} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_3^{(r_k)}} \delta u_3^{(r_k)} \right] = 0 \quad (22)$$

denkleminde (16)-(20)'de verilen denklemler ve gerilmelere göre, sınır ve temas koşulları elde edilmektedir. Dolayısıyla ele alınan (16)-(20) sınır değer problemi ile (21) fonksiyoneli özdeş problemler olur.

zm bölgesi ve yükleme durumuna göre simetri özelliklerinden yararlanılarak ( $x_1 = \ell_1 / 2$ ,  $x_2 = h / 2$ ,  $x_3 = \ell_3 / 2$  simetri düzlemleri için), plağın 1/8'lik parçası göz önüne alınmıştır. Ele alınan probleme ait zm bölgesi, sonlu sayıda alt bölgeye ayrıklaştırılmıştır yani,

$$V = \bigcup_{k=1}^M V_k \quad (23)$$

dir. (23)'de  $V_k$ , k. alt bölgeyi yani sonlu elemanı göstermektedir. Sonlu eleman ayrıklaştirmasında, 8 nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır [24].

Bu çalışmada yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Yani, sonlu eleman ayrıklaştirmasında nodlarda bilinmeyen olarak sadece yer değiştirme değerleri alınacaktır. Aranılan yer değiştirme fonksiyonunun polinom olarak ifadesi, Şekil fonksiyonları ve nodlarda aranılan yer değiştirmeler yardımıyla aşağıdaki gibi seçilir,

$$\mathbf{u}^{(k)} \approx \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (24)$$

(24)'de, (k) st indisi, ilgili büyüklüklerin  $V_k$  sonlu elemanına ait olduğunu,  $\mathbf{a}^{(k)}$  vektörünün bileşenleri ise,  $V_k$  elemanın nodlarında aranılan yer değiştirmeleri göstermektedir.

$\mathbf{a}^{(k)}$ ,  $\mathbf{N}^{(k)}$  ve  $\mathbf{u}^{(k)}$  ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}^{(k)})^T &= (u_{11}^{(k)} \ u_{21}^{(k)} \ u_{31}^{(k)} \ u_{12}^{(k)} \ u_{22}^{(k)} \ u_{32}^{(k)} \ \dots \ u_{18}^{(k)} \ u_{28}^{(k)} \ u_{38}^{(k)}), \\ (\mathbf{N}^{(k)})^T &= \begin{bmatrix} N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & 0 & \dots & N_8^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & \dots & 0 & N_8^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & \dots & 0 & 0 & N_8^{(k)} \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{u}^{(k)})^T &= (u_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \ u_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \ u_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3)). \end{aligned} \quad (25)$$

(25)'de  $u_{rs}^{(k)}$ , k. sonlu elemanda,  $Ox_r$  ( $r=1,2,3$ ) doğrultusunda ve  $s.(=1,2,\dots,8)$  düğüm noktasındaki yer değiştirme değerini göstermektedir. (24) ifadesi (21) fonksiyonelinde yerine yazılarak Ritz tekniği yardımıyla uygun cebrik denklem sistemi elde edilir:



$$\mathbf{Ka} = \mathbf{r} . \quad (26)$$

(26)'da,  $\mathbf{K}$  katsayılar (rijitlik) matrisini,  $\mathbf{a}$ , bileşenleri nodlarda aranan yer değiştirmeler olan vektörü ve  $\mathbf{r}$ , bileşenleri nodlara etki eden kuvvetler olan vektörü temsil etmektedir. Çözümde ortaya çıkan integral ifadelerin sayısal hesaplamasında, Gauss karelemesi metodu 10 Gauss noktası kullanılarak yapılmıştır [24]. Ayrıca sayısal çözümün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar yazar tarafından FTN77 ile yapılmıştır.

## 5. SAYISAL SONUÇLAR

Ele alınan sandviç kalın plağın üç tabakadan (iki dış ve bir çekirdek tabakalarından) oluştuğu ve her bir tabakanın homojen ve izotrop malzeme özelliklerine sahip olduğu kabul edilmektedir. Dış tabakalar aynı malzemeden yapılmış olup, elastisite modülü ve Poisson oranı sırasıyla  $E_2$  ve  $\nu_2$ , iç tabaka ise farklı malzemeden yapılmış olup, malzeme sabitleri  $E_1$  ve  $\nu_1$  olarak gösterilmiştir. Çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğriliğin formu,

$$f^\pm(x_1) = \pm \ell_{10} \sin^2 \left( \frac{\pi}{\ell_{10}} \left( x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \quad (27)$$

olarak seçilmiştir. (27) fonksiyonu, çatlağın alt ve üst yüzeylerinin birbirine göre simetrik ama zıt yönde eğriliğe sahip olmasına karşı gelmektedir (Şekil 2.a).

Problemin çözülmesiyle,  $x_2 = h_F$ 'deki alt çatlağın alt yüzeyine ait düşey doğrultudaki yer değiştirmenin yüzey grafiği yani burkulma modu Şekil 2.b'de verilmiştir. Bu yüzey grafiği,  $h/\ell_1 = 0.15$ ,  $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$ ,  $\ell_3/\ell_1 = \gamma_{31} = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  ve  $p/E_1 = 0.0062$  (yani  $(p_{kr}/E_1 - p/E_1) < 10^{-4}$ ) parametre değerleri için çizilmiştir. Şekil 2.b ile elde edilen burkulma mod grafiği, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ve (27) denklemi ile gösterilen ön eğriliğin formuna uygun düşmektedir. Malzeme ve geometrik parametrelerin değişiminin, plağın burkulma modunu etkilemediği tespit edilmiştir. Bu şekillerde eksenler  $x(=x_1)$  ve  $z(=\ell_3 - x_3)$  ile gösterilmiştir.

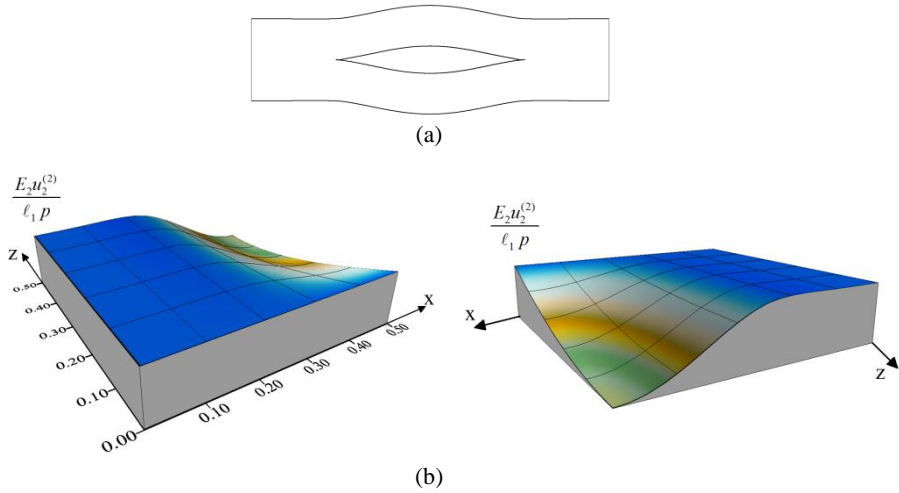
Dikdörtgen sandviç plakta kritik burkulma  $p_{kr}/E_1$  değerlerine, çeşitli malzeme ve geometrik parametrelerin etkisi sayısal olarak incelenmiş ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan algoritma ve programlar [22] kaynağındaki sayısal veriler ile test edilmiş, bu sayede algoritma ve programlara güven sağlanmıştır.

Şekil 3'de,  $h_F/\ell_1 = 0.0375$  durumunda, farklı  $E_2/E_1$  değerleri için bant çatlağın  $Ox_1$  doğrultusundaki uzunluğunun ( $\ell_{10}/\ell_1$ ) değişiminin  $p_{kr}/E_1$  değerlerine etkisi verilmiştir. Grafikten görüldüğü üzere,  $\ell_{10}/\ell_1$  değeri arttıkça kritik delaminasyon burkulma değeri azalmaktadır. Ayrıca  $E_2/E_1$  değeri azaldıkça, sandviç kalın plağın  $p_{kr}/E_1$  değeri azalmaktadır. Bu grafikte yapıda çatlak olmaması durumuna ait kritik burkulma (stabilite kaybı) değeri de verilmiştir. Yapıda bant çatlağın yatay doğrultudaki uzunluğu yani  $\ell_{10}/\ell_1$  parametresinin değeri azaldıkça, beklendiği gibi, uygun durumdaki çatlaksız sandviç kalın plağın kritik burkulma değerine yaklaştığı tespit edilmiştir. Ayrıca  $E_2/E_1 = 0.5$  durumunda  $\ell_{10}/\ell_1 < 0.23$  için sandviç kalın plağın kritik delaminasyon burkulma değerinin, çatlak içermeyen uygun sandviç kalın plağın stabilite kaybından büyük olduğu görülmektedir. Bu durum,  $E_2/E_1 = 0.5$  için sandviç kalın plağın bütününe stabilite kaybının, aynı plağın delaminasyon burkulmasından daha önce gerçekleştiğini göstermektedir. Benzeri durumların diğer elastisite modülü oranlarında farklı  $\ell_{10}/\ell_1$  değerleri için gerçekleştirilebileceği öngörüsü yapılabilir. Dolayısıyla, delaminasyon

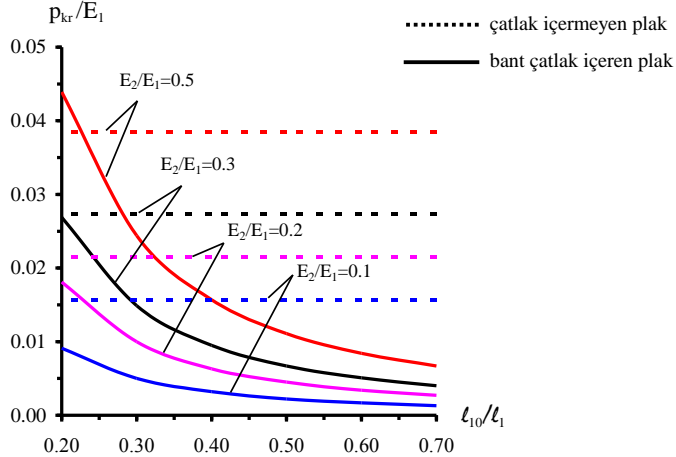
burkulma olayının incelenmesinin ancak belirli uzunluktaki çatlaklar ve elastisite modülü oranları için anlamlı olduğu söylenebilir.

Çizelge 1’de, dış tabakaların kalınlığı  $h_f / \ell_1 = 0.01875$  alınarak, farklı  $\ell_{10} / \ell_1$  değerleri için kritik burkulma değerlerinin değişimi verilmiştir. Şekil 3 için yapılan değerlendirmeler Çizelge 1 için de geçerlidir.

Çizelge 2’de, bazı  $E_2 / E_1$  değerlerinde, farklı  $h_f / \ell_1$  yani, dış tabakaların kalınlığının değişiminin  $p_{kr} / E_1$  değerlerine etkisi verilmiştir. Sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere dış tabakaların kalınlığı arttıkça veya  $E_2 / E_1$  oranı arttıkça,  $p_{kr} / E_1$  değerleri de artmaktadır.



**Şekil 2.** Ele alınan plakta a) çatlak yüzeylerine verilen ön eğriliğin formu; b)  $x_2 = h_f - 0$  yüzeyinin burkulma modu



**Şekil 3.**  $E_2 / E_1$  ve  $\ell_{10} / \ell_1$  değerleri değişiminin  $p_{kr} / E_1$  değerine etkisi  
( $\gamma_{31} = 1$ ,  $h_f / \ell_1 = 0.0375$ )

**Çizelge 1.**  $E_2/E_1$  ve  $\ell_{10}/\ell_1$  değerleri değişiminin  $p_{kr}/E_1$  değerine etkisi  
( $\gamma_{31}=1$ ,  $h_F/\ell_1=0.01875$ )

$E_2/E_1$	$\ell_{10}/\ell_1$					
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
0.1	0.0031	0.0046	0.0062	0.0093	0.0162	0.0333
0.2	0.0036	0.0048	0.0068	0.0100	0.0168	0.0344
0.3	0.0038	0.0049	0.0068	0.0101	0.0173	0.0354
0.5	0.0042	0.0054	0.0073	0.0108	0.0182	0.0371

**Çizelge 2.**  $E_2/E_1$  ve  $h_F/\ell_1$  değerleri değişiminin  $p_{kr}/E_1$  değerine etkisi  
( $\gamma_{31}=1$ ,  $\ell_{10}/\ell_1=0.5$ )

$h_F/\ell_1$	$E_2/E_1$			
	0.1	0.2	0.3	0.5
0.01250	0.0042	0.0047	0.0047	0.0049
0.01875	0.0062	0.0068	0.0068	0.0073
0.02500	0.0084	0.0088	0.0094	0.0101
0.03125	0.0106	0.0113	0.0120	0.0132
0.03750	0.0121	0.0135	0.0145	0.0166
0.04375	0.0133	0.0152	0.0167	0.0198
0.05000	0.0140	0.0160	0.0184	0.0227
0.05625	0.0136	0.0166	0.0196	0.0255

#### Acknowledgments / Teşekkür

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesindeki desteklerinden dolayı Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV ve Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU'na teşekkür ederim. Ayrıca, bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Araştırma Projesi kapsamında desteklenmektedir. Proje numarası: 2010-05-01-DOP01.

#### REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] Griffith A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A-Mathematical Physical and Engineering Sciences, 221A:163-198, 1921.
- [2] Griffith A. A., "The Theory of Rupture", In Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, Holland, 55-63, 1924.
- [3] Kachanov L. M., "Fracture of Composite Materials by Means a Delamination", Mekhanika Polimerov, 5, 918-922, 1976.
- [4] Kardomateas G. A., Pelegri A. A., Malik B., "Growth of Internal Delaminations Under Cyclic Compression in Composite Plates", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 43, 6, 847-866, 1995.

- [5] Nilsson K. F., Thesken J. C., Sindelar P., et. al., "A Theoretical and Experimental Investigation of Buckling Induced Delamination Growth", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, 4, 749-782, 1993.
- [6] Chai H., Babcock C. D., Knauss W. G., "One-Dimensional Modeling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling", *International Journal of Solids and Structures*, 17, 11, 1069-1083, 1981.
- [7] Wang J. S., Evans A. G., "Measurement and Analysis of Buckling and Buckle Propagation in Compressed Oxide Layers on Superalloy Substrates", *Acta Materialia*, 46, 14, 4993-5505, 1998.
- [8] Short G. J., Guild F. J., Pavier M. J., "The Effect of Delamination Geometry on the Compressive Failure of Composite Laminates", *Composites Science and Technology*, 61, 14, 2075-2086, 2001.
- [9] Arman Y., Zor M., Aksoy S., "Determination of Critical Delamination Diameter of Laminated Composite Plates Under Buckling Loads", *Composites Science and Technology*, 66, 15, 2945-2953, 2006.
- [10] Chakrabarti A., Sheikh A. H., "Buckling of Laminated Sandwich Plates Using an Efficient Plate Model", *International Shipbuilding Progress*, 54, 1, 63-81, 2007.
- [11] Chakrabarti A., Topdar P., Sheikh A. H., "Vibration and Buckling of Laminated Sandwich Plates Having Interfacial Imperfections", *European Journal of Mechanics A/Solids* 25, 6, 981-995, 2006.
- [12] Guz A. N., "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Berlin, Springer-Verlag, 1999.
- [13] Guz A. N., Nazarenko V. M., "Theory of Near-Surface Delamination of Composite Materials under Compression along the Macro-Crack", *Mech. Comp. Mater.*, 21(5), 826-833, 1985a.
- [14] Guz A. N., Nazarenko V. M., "Symmetric Failure of the Halfspace with Penny-Shaped Cracks in Compression", *Theoretical Applied Fracture Mechanics*, 3, 3, 233-245, 1985b.
- [15] Biot M. A., "Nonlinear Theory of Elasticity and Linearized Case for a Body under Initial Stresses", *Philosophical Magazine Series Z*, 27, 89-115, 1939.
- [16] Akbarov S. D., Rzayev O. G., "On the Buckling of the Elastic and Viscoelastic Composite Circular Thick Plate with a Penny-Shaped Crack", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21, 2, 269-279, 2002.
- [17] Akbarov S. D., Rzayev O. G., "On the Delamination of a Viscoelastic Composite Circular Plate", *International Applied Mechanics*, 39, 3, 368-374, 2003.
- [18] Akbarov S. D., Sisman T., Yahnioglu N., "On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression", *International Journal of Engineering Science*, 35, 12-13, 1115-1136, 1997.
- [19] Akbarov S. D., "On the Three-Dimensional Stability Loss Problems of Elements of Structures of Viscoelastic Composite Materials", *Mechanics of Composite Materials*, 34, 6, 537-544, 1998.
- [20] Akbarov S. D., Yahnioglu N., "A Method of Investigation of the General Theory of Stability Problems on Structural Elements Fabricated from Viscoelastic Composite Materials", *Composites Part B: Engineering*, 32, 5, 475-482, 2001.
- [21] Rzayev O. G., Akbarov S. D., "Local Buckling of the Elastic and Viscoelastic Coating Around the Penny-Shaped Interface Crack", *International Journal of Engineering Science*, 40, 13, 1435-1451, 2002.
- [22] Akbarov S. D., Yahnioglu N., Tekin A., "3D FEM Analyses of the Buckling Delamination of a Rectangular Sandwich Plate Containing Interface Rectangular Cracks and Made from Elastic and Viscoelastic Materials", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 64, 2, 147-186, 2010.
- [23] Hoff N. J., "Buckling and Stability", *J. Roy. Aeron. Soc.*, 58, 1, 1954.

- [24] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., ‘‘The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems’’, Vol. 1, 4<sup>th</sup> Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.