



Research Article / Araştırma Makalesi
GREY SYSTEM APPROACH FOR EOQ MODELS

Erkan KÖSE*¹, Serpil EROL², İzzettin TEMİZ²

¹*Kara Harp Okulu Dekanlığı, Bakanlıklar-ANKARA*

²*Gazi Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Maltepe-ANKARA*

Received/Geliş: 30.07.2010 Revised/Düzeltilme: 15.09.2010 Accepted/Kabul: 24.09.2010

ABSTRACT

Despite the fact that grey systems approach has been applied in many fields since it was first introduced in 1982 we could not come across with any study in literature assuming all parameters grey in Economic Order Quantity (EOQ) models. In this study, contrary to the classical EOQ models unit holding and order cost parameters are included in the model as interval grey numbers and the grey prediction model has been used to forecast annual demand rate. To determine optimal order quantity, total cost function, which is also an interval grey number has been calculated by using grey number mathematical operations. The total cost function has been whitenized first by using equal weight mean whitenization then fuzzy mathematical programming methods and obtained results have been compared for different cost parameters. The analysis of the results show that for all cost parameters equal weight mean whitenization method yields better results than fuzzy mathematical programming methods.

Keywords: Grey system theory, economic order quantity, fuzzy mathematical programming.

MSC numbers/numaraları: 90B05.

EOQ MODELLERİ İÇİN GRİ SİSTEM YAKLAŞIMI

ÖZET

Gri sistem yaklaşımı ilk ortaya atıldığı 1982 yılından bugüne kadar pek çok alanda uygulanmış olmasına rağmen Ekonomik Sipariş Miktarı (EOQ) modellerinde yer alan tüm parametreleri gri sayan bir çalışmaya literatürde rastlanılmamıştır. Bu çalışmada EOQ modelinde yer alan birim stokta tutma ve sipariş verme maliyet parametreleri, geleneksel EOQ modellerinin aksine aralıklı gri sayılar olarak modele dâhil edilmiş, yıllık talep miktarının tahmininde ise gri tahmin modeli kullanılmıştır.

Optimal sipariş miktarını belirleyebilmek için gri sayı matematiksel işlemleri kullanılarak aralıklı bir değer olan toplam maliyet fonksiyonu hesaplanmıştır. Toplam maliyet fonksiyonu önce eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi ardından da bulanık matematiksel programlama yöntemi kullanılarak durulaştırılmış ve değişik maliyet parametreleri için her iki yöntem karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde bütün maliyet parametreleri için eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yönteminin bulanık matematiksel programlama yönteminden daha iyi sonuçlar ürettiği görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Gri sistem teorisi, ekonomik sipariş miktarı, bulanık matematiksel programlama.

* Corresponding Author/Sorumlu Yazar: e-mail/e-ileti: erkose@kho.edu.tr, tel: (532) 493 16 27

1. GİRİŞ

Stok yönetiminde amaç; toplam maliyeti en küçük yapan stok malzemesinin ne kadar ve ne zaman sipariş verileceğini tespit etmektir. Bu iki soruya çeşitli varsayımlar altında kurulan analitik modeller ile cevap aranır.

Stok problemlerini çözmek amacıyla birçok matematiksel model geliştirilmiştir. İlk defa 1915 yılında Ford Harris deterministik yapıya sahip, basit EOQ modelini matematiksel olarak formüle etmiştir [1]. 1940'ların sonlarına kadar birçok araştırmacı deterministik stok modelleri ve bu modellerin türevleri üzerinde çalışmışlardır. Gerçek hayat problemleri çok çeşitli tipteki belirsizliği barındırmasına rağmen deterministik stok modelleri bu belirsizlikleri yok sayma eğiliminde olmuşlardır. Deterministik stok modellerinde başta talep miktarı olmak üzere stok modelinde yer alan parametre değerlerinin kesin olarak bilindiği varsayılır. Gerçekte karşılanması mümkün olmayan bu varsayımı ortadan kaldırmak için daha sonraları stokastik ve bulanık mantık tabanlı EOQ modelleri önerilmiştir.

Stokastik EOQ modellerinde karşılaşılan en önemli sorun, özellikle maliyet parametreleri gibi belirli aralıklarda değerler alan değişkenlerin alacağı değerin belirlenmesinde yaşanmaktadır. Bu modellerde karşılaşılan bir başka sorun da bazı durumlarda ilgili dağılımları tesis edebilmek için yeterli veriye ulaşılamamasıdır.

Bulanık mantık tabanlı EOQ modellerinde ise belirsizlikle baş edebilmek için ilgili parametre değerlerine ait üyelik fonksiyonlarının oluşturulmasına çalışılmaktadır. Üyelik fonksiyonlarının oluşturulabilmesi için karar vericilerin incelenen sistem hakkında yeterli tecrübelerinin bulunması gerekmektedir.

Stok planlama sürecinde yaşanan belirsizlikleri bulanık matematik, olasılık veya istatistikle tam olarak açıklamak mümkün değildir. Teknik olarak söylemek gerekirse, bulanık matematik kavramsal belirsizliğe sahip problemleri, geçmiş tecrübeler yardımıyla, üyelik fonksiyonlarını kullanarak çözmeye çalışır. Olasılık ve istatistik ise gerçekçi çıkarımlar yapabilmek için özel dağılımlara ve makul büyüklükte bir örnekleme ihtiyaç duyarlar.

Ancak, herhangi bir geçmiş tecrübenin bulunmadığı, gerekli dağılımların tesis edilemediği veya oldukça küçük bir örnekleme erişilebildiği durumlarla sıklıkla karşılaşmaktadır. İşte bu gibi belirsiz sistemler üzerinde memnuniyet verici uygulamalar yapabilmek gücüne sahip gri sistem yaklaşımı 1982 yılında Profesör Deng tarafından ortaya konmuştur [2].

Gri sistem yaklaşımı ilk ortaya atıldığı 1982 yılından bu güne kadar pek çok alanda uygulanmış olmasına rağmen EOQ modellerinde yer alan tüm parametreleri gri sayan bir çalışmaya literatürde rastlanılmamıştır.

Chiou ve diğerleri [3], Tayvan donanması yedek parça stoklarının kontrolü için yapmış oldukları çalışmada sadece talep miktarını belirlemek için gri modelleme yaklaşımını kullanmışlar, stok planlama sürecinde yer alan diğer belirsizliklere değinmemişlerdir.

Hsu [4] ise entegre devre talep tahminine ilişkin geleneksel yöntemler ile gri tahmin yöntemlerini karşılaştırmış ve kısa dönemlik tahminler için gri modellerin daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Yapılan her iki çalışmada da stok modellerindeki talebe ilişkin belirsizlik incelenmiştir. Stok modellerinde yer alan diğer belirsizlik türlerine değinilmemiş ve tahmin edilen talep miktarları optimal sipariş miktarının belirlenmesinde kullanılmamıştır.

Bu çalışma, EOQ modellerinde yaşanan belirsizlikler karşısında gri sistem yaklaşımının nasıl sonuçlar ürettiğini test etmek amacıyla tasarlanmıştır. Çalışmada, bulunduğu sektörde dört yıldır faaliyet gösteren bir firma için optimal sipariş miktarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Firma yetkilileri talebe ilişkin sadece dört yıllık veriye sahiptir ve süreç henüz çok yeni olduğundan stok planlama sürecinde karşılaşılan maliyetlerin ne olacağı tam olarak kestirilememektedir. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde bu gibi durumlarda, modelde yer alan belirsizliklerin genellikle bulanık mantık veya olasılık teorisi ile açıklanmaya çalışıldığı

görülmektedir. Oysa böylesi bir durumda karar vericiler ne istatistiksel çıkarım yapacak büyüklükte veri setine, ne de parametre değerlerine ilişkin üyelik fonksiyonlarını oluşturabilecek yeterli tecrübeye sahip değillerdir.

Literatürde karşılaşılan çalışmaların aksine bu çalışmada EOQ modelinde karşılaşılan belirsizlikler gri sistem yaklaşımı ile ele alınmaya çalışılmış ve Gri EOQ modeli olarak isimlendirilen yeni bir model önerilmiştir. Gri EOQ modeli birim stokta tutma ve sipariş verme maliyet parametrelerinin aralıklı gri sayılarla ifade edildiği bir stok modelidir [5].

Gri EOQ modelinde yer alan yıllık talep miktarı kısa dönemlik tahminler için sınırlı miktarda veriye ulaşılabildiği durumlarda en iyi sonucu üreten gri tahmin yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Gri tahmin yöntemi kullanılarak elde edilen talep tahmini tek bir değer olarak modele katılmış ve gri sayı matematiksel işlemleri kullanılarak aralıklı bir değer olan toplam maliyet fonksiyonu hesaplanmıştır. Son aşamada, elde edilen toplam maliyet fonksiyonunun durulaştırılmasında önce eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi ardından bulanık matematiksel programlama yaklaşımı kullanılmış ve değişik maliyet parametreleri için her iki yöntem karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde bütün maliyet parametreleri için eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yönteminin bulanık matematiksel programlama yönteminden daha iyi sonuçlar ürettiği görülmüştür.

Çalışmanın bundan sonraki bölümünde gri sistem teorisi ele alınmıştır. Üçüncü bölümde EOQ modelinde yer alan parametre değerlerinin belirsiz olduğu durum için gri EOQ modeli geliştirilmiştir. Dördüncü bölümde geliştirilen model örnek bir problem üzerinde uygulanarak farklı parametre setleri için test edilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ulaşılan sonuçlar özetlenerek, bundan sonra yapılabilecek çalışmalar için teklif ve öneriler sunulmuştur.

2. GRİ SİSTEM TEORİ

Disiplinler arası bir yaklaşım olan gri sistem teori ilk olarak 1980'li yılların başında Deng tarafından belirsizliğin sayılaştırılmasında alternatif bir metot olarak ortaya atılmıştır. Ortaya çıkışındaki temel düşünce stokastik veya bulanık yöntemlerle üstesinden gelinemeyen belirsiz sistemlerin davranışlarını, sınırlı sayıda veri yardımı ile tahmin etmektir [6].

Olasılık ve istatistik, bulanık matematik ve gri sistem teori deterministik olmayan sistemler için yapılan çalışmalarda kullanılan en yaygın yöntem ve teorilerdir. Farklı tipteki belirsizliklerle uğraşmalarına rağmen bu teorilerin ortak noktası, eksik bilgi ve belirsizliğin olduğu durumlarda anlamlı sonuçlar çıkarabilme gücüne sahip olmalarıdır.

Bulanık matematiğin gücü, tanımsal belirsizliğe sahip problemlere çözüm bulabilmesinde yatmaktadır. Bulanık matematik kullanılarak incelenen bütün nesnelere belirgin içsellik, belirgin olmayan uzantı karakteristiğine sahiptirler. Örneğin “genç adam” bulanık bir kavramdır. Genç adam denildiğinde neyin kastedildiğini herkes bilir ancak tam olarak hangi yaş aralığındaki insanların bu tanımlamaya uyduğunu söylemek oldukça güçtür.

Bulanık matematikten farklı olarak gri sistem teori ile incelenen nesnelere belirgin uzantı, belirgin olmayan içsellik karakteristiğine sahiptirler [7]. Örneğin “T.C Hükümeti, ülke nüfusunu 2050 yılına kadar 90 ile 100 milyon arasında tutmayı planlıyor” ifadesindeki 90 ile 100 milyon aralığı, gerçek değeri hakkında herhangi bir bilgi sahibi olmadığımız ancak sınırları kesin olarak bilinen bir gri kavramdır.

Olasılık ve istatistik ise olasılıklı belirsizlik problemlerinin çözümünde kullanılır. Çözüm arayışında gayretinin çoğunluğunu geçmiş verilerde var olan istatistiksel seyri ortaya çıkartmak için kullanır. Bu teori güvenilir sonuçlar üretebilmek için aynı dağılımdan geldiği varsayılan yeterince büyük bir örnekleme ihtiyaç duyar.

Diğer iki teoriden farklı olarak gri sistem teori, küçük örneklem ve zayıf bilginin yer aldığı problemlere çözüm bulabilmek için geliştirilmiştir. Aşağıdaki Çizelgede üç teori arasındaki farklılıklar özet olarak gösterilmiştir [6].

Çizelge 1. Deterministik Olmayan Yöntemlerin Karşılaştırılması

	Gri Sistem Teori	Olasılık & İstatistik	Bulanık Matematik
Çalışma Alanı	Yetersiz bilgi	İstatistiksel belirsizlik	Kavramsal belirsizlik
Temel Küme	Gri belirsiz kümeler	Kantor kümeler	Bulanık kümeler
Yöntem	Bilgi kapsamı	Olasılık dağılımları	Üyelik fonksiyonları
Prosedür	Gri serilerin oluşturulması	Sıklık dağılımları	Marjinal örneklem
Gereksinim	Herhangi bir dağılım	Belirli dağılımlar	Tecrübe
Amaç	Gerçekçi kurallar	İstatistiksel kanunlar	Kavramsal ifadeler
Karakteristik	Küçük örneklem	Büyük örneklem	Tecrübe

Gri teori ortaya atıldığı ilk günden bu güne kadar geçen yaklaşık 30 yıllık sürede başta endüstri, sosyal sistemler, ekolojik sistemler, ekonomi, trafik, yönetim, eğitim, çevre ve askeri konular olmak üzere pek çok alanda başarı ile uygulanmıştır [8]. Gri sistem teorisi temel olarak sistemler arasındaki ilişkinin analizi, model kurulması, tahmin ve karar problemlerinde sıkça kullanılan bir yöntemdir [9]. Gri sistem teori alanında yapılan çalışmaları; gri üretim [10-12], gri ilişki analizi [13-16], gri modelleme [17-20], gri tahmin [3,4,20-24], gri karar verme [25-29] ve gri kontrol [30-31] olmak üzere altı ana başlık altında incelemek mümkündür.

3. EOQ MODELİ İÇİN GRİ SİSTEM YAKLAŞIMI

EOQ modeli tüm stok modellerinin en temel ve yalınıdır. Klasik EOQ modelinde amaç toplam maliyet fonksiyonunu minimum yapan sipariş miktarının belirlenmesidir. Gerçek hayatta karşılaşılabildiği kadar güç birtakım varsayımları kullanmasına rağmen elde ettiği çözümler pek çok yönden tatmin edici bulunmaktadır. EOQ modelinde aşağıdaki varsayımlar yapılmaktadır [32,33]:

1. Tedarik süresi sipariş miktarından bağımsızdır.
2. Talep sabit ve süreklidir.
3. Satın alma fiyatı (birim değişken maliyet) sabittir.
4. Stok bulundurma maliyeti stok miktarının doğrusal bir fonksiyonudur.
5. Sipariş maliyeti her sipariş için sabit ve sipariş miktarından bağımsızdır.
6. Stoksuzluğa izin verilmemektedir.

EOQ modellerinde toplam maliyet fonksiyonu satın alma, sipariş verme ve stokta tutma maliyetlerinin bileşkesidir. Ancak varsayım gereği sipariş maliyeti parti büyüklüğünden bağımsız olduğundan optimal sipariş miktarının belirlenmesinde satın alma maliyet kaleminin herhangi bir etkisi yoktur. Bu nedenle optimal sipariş miktarı belirlenirken çoğu zaman satın alma maliyeti göz ardı edilir. Satın alma maliyeti çıkartılmış hali ile klasik EOQ modeli için toplam maliyet fonksiyonu ve fonksiyonda yer alan parametre değerlerinin tanımlaması aşağıda gösterildiği gibidir.

Toplam maliyet fonksiyonu

TM: Toplam maliyet fonksiyonu

D: Yıllık talep miktarı,

Q: Her bir periyot için sipariş miktarı,

C: Sipariş verme maliyeti,

H: Birim zamanda stokta tutma maliyeti

TM= Sipariş Maliyeti + Elde Bulundurma Maliyeti

$$TM = C \frac{D}{Q} + \frac{HQ}{2}, \quad Q > 0 \quad (1)$$

Her periyot için optimal sipariş miktarı toplam maliyet fonksiyonunun Q 'ya göre türevi alınarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{dTM}{dQ} = -\frac{CD}{Q^2} + \frac{H}{2} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2CD}{H}}, TM(Q^*) = \sqrt{2HCD} \quad (2)$$

Detreministik EOQ modelleri için yapılan en önemli eleştiri, modelde yer alan parametre değerlerinin kesin olarak bilindiği varsayımdır. Oysa gerçek hayatta ne maliyet parametrelerinin alacağı değeri ne de talep miktarını önceden tam olarak bilmek mümkün değildir.

Bu bölümde, EOQ modelinde yer alan belirsizlikler, ilgili dağılımları tesis edecek kadar veriye ulaşılmadığı veya karar vericilerin sistem hakkında yeterli tecrübelerinin bulunmadığı durumlarda kullanılabilen en etkili yöntem olması nedeniyle gri sistem yaklaşımı ile ele alınmıştır.

Gri EOQ modeli oluşturulurken, geleneksel EOQ modelinde yer alan maliyet parametreleri tek bir değer yerine aralıklı gri sayılarla ifade edilmiştir. Talep miktarı ise, eldeki mevcut veriler kullanılarak oluşturulan gri tahmin modeli yardımıyla hesaplanmıştır. Gri EOQ modelinde kullanılacak değişken ve parametre değerleri aşağıda gösterildiği şekilde tanımlanmıştır.

\hat{D} : Birinci dereceden bir değişkenli gri diferansiyel denklem modeli (GM (1,1)) kullanılarak elde edilen tahmini yıllık toplam talep miktarı,

$\otimes_1 \in [c_1, c_2]$: Sipariş verme maliyeti için alt sınır değeri c_1 , üst sınır değeri c_2 olan aralıklı gri sayı,

$\otimes_2 \in [h_1, h_2]$: Stokta tutma maliyeti için alt sınır değeri h_1 , üst sınır değeri h_2 olan aralıklı gri sayı,

\hat{TM} : Gri toplam maliyet değeri,

Q : Her bir periyot için sipariş miktarı.

Bir yıllık planlama dönemi için toplam maliyet fonksiyonu gri parametre değerleri kullanılarak yeniden yazılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\hat{TM} = [c_1, c_2] \frac{\hat{D}}{Q} + [h_1, h_2] \frac{Q}{2}, Q > 0 \quad (3)$$

Eşitlik (3) ile gösterilen gri toplam maliyet değeri gri sayı matematiksel işlemleri kullanılarak hesaplanırsa eşitlik (4) elde edilir.

$$\hat{TM} = [c_1 \frac{\hat{D}}{Q} + h_1 \frac{Q}{2}, c_2 \frac{\hat{D}}{Q} + h_2 \frac{Q}{2}], Q > 0 \quad (4)$$

Aralıklı bir değer olarak hesaplanan toplam maliyet fonksiyonunun durulaştırılması için bu çalışmada iki farklı yaklaşım ele alınmıştır. Toplam maliyet fonksiyonu ilk önce gri sayıların dağılım bilgisine sahip olunmadığı durumlarda kullanılması önerilen eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi ve ardından bulanık matematiksel programlama yöntemi kullanılarak durulaştırılmıştır.

3.1. Eşit Ağırlıklı Ortalama Durulaştırma Yöntemi

Aralık şeklinde gösterilen gri sayıların durulaştırılmış değeri, $\otimes \in [a, b]$ olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tilde{\otimes} = \alpha a + (1 - \alpha)b, \alpha \in [0, 1] \quad (5)$$

Tanım-1: $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere, $\tilde{\otimes} = \alpha a + (1 - \alpha)b$ şeklinde gösterilen durulaştırma yöntemine eşit ağırlıklı durulaştırma yöntemi denir.

Tanım-2: Eşit ağırlıklı durulaştırma yönteminde $\alpha = \frac{1}{2}$ için elde edilen durulaştırma değerine, eşit ağırlıklı ortalama durulaştırması denir. Aralık gri sayılar durulaştırılırken dağılım bilgisine sahip olunmadığı durumlarda genellikle eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi kullanılır [6].

Eşitlik (4) ile gösterilen gri toplam maliyet fonksiyonu eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi kullanarak durulaştırılırsa eşitlik (6) elde edilir.

$$\tilde{TM} = (c_1 + c_2) \frac{\hat{D}}{2Q} + (h_1 + h_2) \frac{Q}{4}, \quad Q > 0 \quad (6)$$

Eşitlik (6) ile gösterilen durulaştırılmış toplam maliyet fonksiyonunu minimum yapan Q^* değerini bulmak için, fonksiyonun Q 'ya göre birinci dereceden türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse, optimal sipariş miktarı ve bu değere karşılık gelen optimal toplam değişken maliyet değeri aşağıda gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\frac{d\tilde{TM}(Q)}{dQ} = -(c_1 + c_2) \frac{\hat{D}}{2Q^2} + \frac{(h_1 + h_2)}{4} = 0 \quad (7)$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(c_1 + c_2)\hat{D}}{(h_1 + h_2)}}, \quad \tilde{TM}(Q^*) = \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)(c_1 + c_2)\hat{D}}{2}} \quad (8)$$

3.2. Bulanık Matematiksel Programlama Yaklaşımı

Eşitlik (4)'deki toplam maliyet fonksiyonu aslında alt ve üst sınırları aşağıda sırasıyla \hat{TM}_L ve \hat{TM}_R ifadeleri ile gösterilen aralıklı bir değerdir.

$$\hat{TM}_L = c_1 \frac{\hat{D}}{Q} + h_1 \frac{Q}{2}, \quad \hat{TM}_R = c_2 \frac{\hat{D}}{Q} + h_2 \frac{Q}{2} \quad (9)$$

Ishibuchi ve Tanaka [34], minimizasyon problemleri için A ve B gibi iki aralıklı sayının sıralama ilişkisini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$A = [A_L, A_R]$ ve $B = [B_L, B_R]$ şeklinde verilen iki aralıklı sayı için;

$$\begin{aligned} A \leq_{LR} B; \quad A_L \leq B_L \quad \text{ve} \quad A_R \leq B_R \\ A <_{LR} B; \quad A \leq_{LR} B \quad \text{ve} \quad A \neq B \end{aligned} \quad (10)$$

Sıralama ilişkisi, aralıklı bir sayının diğer bir aralıklı sayıdan daha iyi olduğunu gösterir. Ancak bu ilişki birinin diğerinden daha büyük olduğu anlamını taşımaz. Yukarıda tanımlanan \leq_{LR} ilişkisi minimizasyon problemleri için karar vericinin hem alt sınır hem de üst sınır değeri bakımından daha küçük olan A aralıklı sayısını B aralıklı sayısına tercih ettiğini göstermektedir.

Tanım-3: S, bütün olabilir çözümler kümesini göstermek üzere, şayet aşağıda gösterilen durumu karşılayan başka bir $Q \in S$ değeri bulunmazsa, $Q^* \in S$ minimizasyon şeklinde tanımlanan aralıklı toplam maliyet fonksiyonları için optimal çözüm değeridir.

$$\hat{TM}(Q) <_{LR} \hat{TM}(Q^*) \quad (11)$$

Yukarıda yapılan tanımlamalara göre eşitlik (4)'de gösterilen aralıklı toplam maliyet fonksiyonunu minimum yapan Q^* değerine, aşağıda gösterilen çok amaçlı deterministik modelin çözümü ile ulaşılır.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \left\{ \hat{T}M(Q)_L, \hat{T}M(Q)_R \right\} \\ & \text{st: } Q > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Eşitlik (12)'de tanımlanan deterministik çok amaçlı programlama modelinin çözümü için Bit ve diğerleri [35] tarafından önerilen bulanık programlama dönüşümü aşağıda açıklanan adımlar takip edilerek gerçekleştirilir.

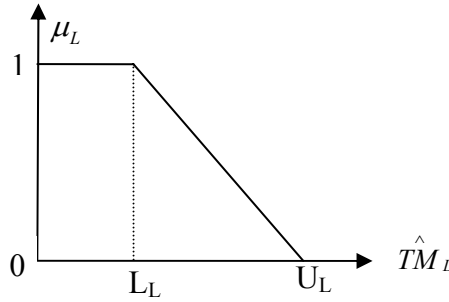
Adım 1. Probleme tanımlanan kısıtlar altında $\hat{T}M(Q)_L$ fonksiyonunu tek başına çöz ve bu fonksiyonu minimum yapan Q_L^* değerine karşılık gelen L_L en düşük maliyet değerini hesapla.

Adım 2. Probleme tanımlanan kısıtlar altında $\hat{T}M(Q)_R$ fonksiyonunu tek başına çöz ve bu fonksiyonu minimum yapan Q_R^* değerine karşılık gelen L_R en düşük maliyet değerini hesapla.

Adım 3. Adım 1'de $\hat{T}M(Q)_L$ fonksiyonunu minimum yapan Q_L^* değerini, $\hat{T}M(Q)_R$ fonksiyonunda yerine yaz ve $\hat{T}M(Q)_R$ fonksiyonunun alabileceği en yüksek maliyet değeri olan U_R değerini hesapla.

Adım 4. Adım 2'de $\hat{T}M(Q)_R$ fonksiyonunu minimum yapan Q_R^* değerini, $\hat{T}M(Q)_L$ fonksiyonunda yerine yaz ve $\hat{T}M(Q)_L$ fonksiyonunun alabileceği en yüksek maliyet değeri olan U_L değerini hesapla.

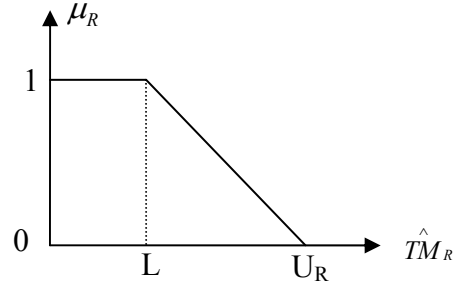
Adım 5. $\hat{T}M(Q)_L$ amaç fonksiyonu için Şekil 1'de gösterilen üyelik fonksiyonunu oluştur.



Şekil 1. $\hat{T}M(Q)_L$ için Üyelik Fonksiyonu

$$\mu_m = \begin{cases} 1 & , \hat{T}M_L \leq L_L \text{ ise} \\ 1 - \frac{\hat{T}M_L - L_L}{U_L - L_L} & , L_L \leq \hat{T}M_L \leq U_L \text{ ise} \\ 0 & , \hat{T}M_L \geq U_L \text{ ise} \end{cases}$$

Adım 6. $\hat{TM}(Q)_R$ amaç fonksiyonu için Şekil 2’de gösterilen üyelik fonksiyonunu oluştur.



Şekil 2. $\hat{TM}(Q)_R$ için Üyelik fonksiyonu

$$\mu_R = \begin{cases} 1 & , \hat{TM}_R \leq L \text{ ise} \\ 1 - \frac{\hat{TM}_R - L_R}{U_R - L_R} & , L_R \leq \hat{TM}_R \leq U_R \text{ ise} \\ 0 & , \hat{TM}_R \geq U_R \text{ ise} \end{cases}$$

Adım 7. Yukarıda tanımlanan üyelik fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki eşdeğer modeli oluştur.

$$\begin{aligned} & \text{Max } \lambda \\ & \text{s.t:} \\ & \lambda \leq 1 - \frac{\hat{TM}_L - L_L}{U_L - L_L} \\ & \lambda \leq 1 - \frac{\hat{TM}_R - L_R}{U_R - L_R} \\ & Q > 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

Adım 8. Adım 7’de oluşturulan eşdeğer modeli uygun bir matematiksel programlama algoritması kullanarak çöz.

Son aşamada elde edilen çözüm, eşitlik (12)’de gösterilen çok amaçlı minimizasyon problemi için her iki amaç fonksiyonunun uzlaşabildiği en iyi değer olacaktır. Eşdeğer modelin çözümü sonucunda elde edilen Q^* değerine karşılık gelen ortalama toplam maliyet değeri ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{TM}(Q)_C = \frac{\hat{TM}(Q)_L + \hat{TM}(Q)_R}{2} \quad (13)$$

4. ÖRNEK UYGULAMA

A firması bulunduğu sektörde dört yıldır faaliyet göstermektedir. Firma yetkilileri olabildiğince sağlıklı bir stok sistemi kurmaya çalışmaktadırlar. Bu maksatla geçmiş dört yıla ait talep verileri derlenmiştir. Son dört yıla ait yıllık talep miktarları: $D_i = (800, 820, 870, 930)$ şeklinde gerçekleşmiştir.

Firma yetkilileri süreç henüz çok yeni olduğundan birim stokta tutma maliyeti ve sipariş verme maliyetlerinin ne kadar olacağını tam olarak bilememektedirler. Ancak birim stokta tutma maliyetinin 25 ile 40 birim, sipariş verme maliyetinin ise 380 ile 410 birim arasında oluşacağını değerlendirmektedirler.

GM (1,1) kullanılarak gelecek bir yıllık dönem için tahmini talep miktarı (\hat{D}) yaklaşık 990 adet olarak hesaplanmıştır. Firma yetkililerinin yapmış oldukları tanımlamalara göre modelde yer alan diğer parametre değerleri ise aşağıda gösterildiği gibidir.

$\otimes_1 \in [380,410]$:Gri sipariş verme maliyeti (alt sınır değeri $c_1 = 380$; üst sınır değeri $c_2 = 410$),

$\otimes_2 \in [25,40]$:Gri stokta tutma maliyeti (alt sınır değeri $h_1 = 25$; üst sınır değeri $h_2 = 40$).

Bu verilere göre gri toplam maliyet fonksiyonu eşitlik (14)'de gösterildiği gibi oluşturulur.

$$\hat{TM} = [380,410] \frac{990}{Q} + [25,40] \frac{Q}{2}, \quad Q > 0 \quad (14)$$

Gri sayı matematiksel işlemlerini kullanarak eşitlik (14)'de gösterilen gri toplam maliyet fonksiyonu düzenlenirse, eşitlik (15) elde edilir.

$$\hat{TM} = \left[\frac{376200}{Q} + 12.5Q, \frac{405900}{Q} + 20Q \right], \quad Q > 0 \quad (15)$$

Eşitlik (15)'de gösterilen gri toplam maliyet fonksiyonu, eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi kullanılarak durulaştırılırsa, toplam maliyet fonksiyonunun durulaştırılmış değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{TM} = \frac{391050}{Q} + 16.25Q, \quad Q > 0 \quad (16)$$

Eşitlik (16)'da gösterilen durulaştırılmış toplam maliyet fonksiyonunu minimum yapan Q^* değerini bulmak için fonksiyonun Q 'ya göre birinci dereceden türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse, optimal sipariş miktarı ve bu değere karşılık gelen optimal toplam maliyet değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{d\hat{TM}}{dQ} = -\frac{391050}{Q^2} + 16.25 = 0 \Rightarrow Q^* = 155.1277 \cong 156 \quad (17)$$

Bu sonuca göre firma yetkilileri her biri 156 birimden oluşan yedi sipariş vermek suretiyle talebi karşılamalıdır. Bu durumda oluşacak toplam maliyet; $\hat{TM} = 5041.652$ birim olacaktır.

Eşitlik (15) ile gösterilen toplam maliyet fonksiyonu üçüncü bölümde yapılan açıklamalar doğrultusunda, bulanık programlama yöntemi ile durulaştırılabilir ve yukarıda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir. Eşitlik (15) ile gösterilen fonksiyonu minimum yapan Q^* değerine, aşağıda gösterilen çok amaçlı deterministik modelin çözümü ile ulaşılır.

$$\text{Min} \left\{ \frac{376200}{Q} + 12.5Q, \frac{405900}{Q} + 20Q \right\} \quad (18)$$

st: $Q > 0$

Eşitlik (18)'de gösterilen deterministik çok amaçlı programlama modelinin çözümü için bulanık matematiksel programlama dönüşüm adımları takip edilirse aşağıda gösterilen eşdeğer model elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \lambda \\
& \text{s.t.} \\
& \lambda \leq 1 - \left[\frac{4455.317}{Q} + 0.148037Q - 51.36346 \right] \\
& \lambda \leq 1 - \left[\frac{3658.633}{Q} + 0.180273Q - 51.36346 \right] \\
& Q > 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned}$$

Eşdeğer modelin GAMS programı ile çözümü sonucunda, $Q^* = 157.2072$ ve $\lambda = 0.7506$ olarak elde edilir. Elde edilen $\lambda = 0.7506$ değeri, çok amaçlı deterministik modelde yer alan amaç fonksiyonları için, karar vericinin elde edeceği en düşük tatmin düzeyini göstermektedir. Bu sonuçlara göre ortalama toplam maliyet değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{TM}(Q^*)_C = \frac{\hat{TM}(Q^*)_L + \hat{TM}(Q^*)_R}{2} = \frac{4358.11 + 5726.087}{2} = 5042.098 \quad (19)$$

Ulaşılan sonuçlar eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi kullanılarak elde edilen toplam maliyet değeri ile karşılaştırıldığında, eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yönteminin 0.446 birim daha düşük toplam maliyet değeri ürettiği görülmektedir.

Aşağıdaki Çizelgede farklı maliyet değerleri için her iki yöntemin ürettiği sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Çizelge 2 incelendiğinde eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi ile elde edilen sonuçların bütün maliyet değerleri için bulanık programlama yaklaşımı ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Maliyet parametrelerinin tanım aralığı genişledikçe (belirsizlik arttıkça), her iki yöntemle elde edilen sonuçlar arasındaki farkların, eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi lehine arttığı, daraldıkça (belirsizlik azaldıkça) sonuçların birbirine yaklaştığı görülmektedir. Bu durum özellikle belirsizliğin fazla olduğu durumlarda eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yönteminin kullanılmasının daha doğru olacağı sonucunu ortaya çıkartmaktadır.

Çizelge 2. Toplam Maliyet Fonksiyonunun Durulaştırılmasında Kullanılan Yöntemlerin Karşılaştırılması

C	H	Toplam Maliyet Fonksiyonunun Durulaştırılmasında Kullanılan Yöntem		FARK	FARK %
		Eşit Ağırlıklı Ortalama Yöntemi	Bulanık Matematiksel Programlama Yöntemi		
[180 , 640]	[25 , 40]	5136.487	5153.264 ($\lambda=0.7525$)	16.777	0.003266
[180 , 640]	[15 , 80]	6209.71	6222.181 ($\lambda=0.7506$)	12.471	0.002008
[180 , 640]	[30 , 35]	5136.487	5158.715 ($\lambda=0.7548$)	22.228	0.004327
[390 , 400]	[25 , 40]	5041.652	5042.124 ($\lambda=0.7509$)	0.472	9.36E-05
[390 , 400]	[30 , 35]	5041.652	5041.657 ($\lambda=0.7501$)	0.005	9.92E-07
[390 , 400]	[15 , 80]	6095.059	6171.091 ($\lambda=0.7603$)	76.032	0.012474
[380 , 410]	[25 , 40]	5041.652	5042.098 ($\lambda=0.7506$)	0.446	8.85E-05
[380 , 410]	[15 , 80]	6095.059	6170.795 ($\lambda=0.7597$)	75.736	0.012426
[380 , 410]	[30 , 35]	5041.652	5041.655 ($\lambda=0.7502$)	0.003	5.95E-07

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada başta talep miktarı olmak üzere stok planlama sürecinde karşılaşılan belirsizlikler, sınırlı sayıda gözlem değerinin bulunduğu durumlarda kullanılabilir en etkili yöntem olması ve

sistemin bilinmeyen davranışlarını tanımlamak için az sayıda kesikli veriye ihtiyaç duyması nedeni ile gri sistem yaklaşımı ile ele alınmıştır.

Çalışmada EOQ modellerinde yer alan birim stokta tutma ve sipariş verme maliyet parametreleri, geleneksel EOQ modellerinin aksine aralıklı gri sayılar olarak modele dâhil edilmiş, talep miktarının tahmininde ise gri tahmin modeli kullanılmıştır. Sadece dört yıllık geçmiş talep miktarları kullanılarak oluşturulan gri tahmin modelinin, diğer tahmin modelleri için neredeyse imkânsız sayılabilecek doğrulukta tahmini sonuçlar ürettiği görülmüştür.

Gri sayı matematiksel işlemleri kullanılarak hesaplanan toplam maliyet fonksiyonunun durulaştırılmasında eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yöntemi ve bulanık matematiksel programlama yaklaşımı kullanılarak değişik maliyet parametreleri için her iki yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ulaşılan sonuçlar incelendiğinde bulanık matematiksel programlama yaklaşımına oranla oldukça basit bir yöntem olan eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yönteminin bütün maliyet parametreleri için daha düşük toplam maliyet değerleri ürettiği görülmüştür. Ayrıca, özellikle maliyet parametreleri için belirsizliğin fazla olduğu durumlarda eşit ağırlıklı ortalama durulaştırma yönteminin kullanılmasının daha doğru olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışma ile belirsizliğin hâkim olduğu sistemler için yapılan stok planlama çalışmalarında gri sistem yaklaşımının başarı ile uygulanabileceği gösterilmiştir. Çalışmada stok planlamasında kullanılan en eski ve en temel yöntem olan geleneksel EOQ modeli için geliştirilen gri yaklaşımın daha karmaşık stok modellerinde de uygulamaları ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] Harris, F.W., "Operation and Cost", Factory Management Series, 48-52, 1915.
- [2] Deng J.L., "Introduction to Grey System", The Journal of Grey System, 1: 1-24, 1989.
- [3] Chiou, H.K., Tzeng, G.H., Cheng, C.K. ve Liu G.S., "Grey Prediction Model for Forecasting the Planning Material of Equipment Spare Parts in Navy of Taiwan", Automation Congress, 17: 315-320, 2004.
- [4] Hsu, L.C., "Applying the Grey Prediction Model to the Global Integrated Circuit Industry", Technological Forecasting & Social Change, 70(6): 563-574, 2003.
- [5] Köse, E, Gri Sistem Teorisi ve Belirsizlik Ortamı İçin EOQ Modeline Uygulanması, Kara Harp Okulu Savunma Bilimleri Enstitüsü Harekat Araştırması Ana Bilim Dalı Doktora Tezi, Ankara, 58-60, 2010.
- [6] Liu, S. ve Lin, Y., Grey Information: Theory and Practical Applications, Springer, 11-21, 2006.
- [7] Deng, J.L., "Difference among Grey, Probability, Fuzzy", Journal of Grey System, 3: 256-262, 1996.
- [8] Huang, T.L., Wen, K.L. ve Deng, J.L., "The Documents of Grey System Theory", 2nd National Conference of Grey Theory and Applications, 1-32, 1997.
- [9] Wen, K.L., Grey Systems: Modeling and Prediction, Tucson, USA, YangSky Scientific Press, 2004.
- [10] Dai, D.B. ve Chen, R.Q., "Frame of AGO Generating Space", The Journal of Grey System, 13(1): 13-16, 2001.
- [11] Dai, D.B. ve Chen, R.Q., "Frame of IAGO Generating Space", The Journal of Grey System, 13(1): 9-12, 2001.
- [12] Xueliang, P., Rurong, Z. ve Shenglan L., "Two-Dimensional Data Sequence and Its Grey Generation", Systems, Man and Cybernetics, 2004 IEEE International Conference, 3: 2425-2430, 2004.
- [13] Lin, C.T. ve Yang, S.Y., "Selection of Home Mortgage Loans Using Grey Relational Analysis", The Journal of Grey System, 11(4): 359-368, 1999.

- [14] Tsai, C.H., Chang, C.L. ve Chen, L., “Applying Grey Relational Analysis to the Vendor Evaluation Model”, *International Journal of the Computer, the Internet and Management*, 11(3): 45 – 53, 2003.
- [15] Chen, M.F. ve Tzeng, G.H., “Combining Grey Relation and TOPSIS Concepts for Selecting an Expatriate Host Country”, *Mathematical and Computer Modeling*, 40(13): 1473-1490, 2004.
- [16] Zhang L.J., Li, Z.J. ve Chen H.W., “Handling Gene Redundancy in Microarray Data Using Grey Relational Analysis”, *International Journal of Data Mining and Bioinformatics*, 2: 134-144, 2008.
- [17] Yeh, M.F. ve Lu, H.C., “A New Modified Grey Model”, *Journal of Grey System*, 1(8): 209-216, 1996.
- [18] Wu, H.J. ve Wen, K.L., “Rolling Error in GM(1,1) Modeling,” *Journal of Grey System*, 13: 77-80, 2001.
- [19] Guo, R., “Repairable System Modeling via Grey Differential Equations”, *Journal of Grey System*, 8(1): 69-91, 2005.
- [20] Kayacan, E., Ulutas, B. ve Kaynak, O., “Grey System Theory-Based Models in Time Series Prediction”, *Expert Systems with Applications*, 37: 1784–1789, 2010.
- [21] Wu, Q., “Grey Prediction of the Military Expenses of America”, *Journal of Grey System*, 4: 315-320, 1994.
- [22] Lin, C.B., Su, S.F. ve Hsu, Y.T., “High-Precision Forecast Using Grey Models”, *International Journal of Systems Science*, 32: 609-617, 2001.
- [23] Trivedi, H.V. ve Singh, J.K., “Application of Grey System Theory in the Development of a Runoff Prediction Model”, *Bio Systems Engineering*, 92(4): 521-526, 2005.
- [24] Mao, M. ve Chirwa, E.C., “Application of Grey Model GM(1,1) to Vehicle Fatality Risk Estimation”, *Technological Forecasting & Social Change*, 73: 588-605, 2006.
- [25] Wu, H.J., *The Method and Application of Grey Decisions*, Chien-Kuo Institute of Technology, Chang-Hwa, 1998.
- [26] Jiang, Y. ve Xu, Q., “Ordering Method for Grey Decision with Multi-Targets” *The Journal of Grey System*, 5: 253-260, 1993.
- [27] Deng, J.L., “Grey Management: Grey Situation Decision Making in Management Sciences”, *The Journal of Grey System*, 2: 93-96, 2004.
- [28] Li, G.D., Yamaguchi, D. ve Nagai, M., “A Grey-Based Decision-Making Approach to the Supplier Selection Problem”, *Mathematical ve Computer Modeling*, 46: 573-581, 2007.
- [29] Akay, D. ve Kulak, O., “ Evaluation of Product Desigu Concepts Using Grey-Fuzzy Information Axiom”, *The Journal of Grey System*, 3: 221-234, 2007.
- [30] Cheng, B., “The Grey Control on Industrial Process”, *Huangshi College Journal*, 1: 11-23, 1986.
- [31] Chiang, H.K., Chen, C.A. ve Li, M.Y., “Integral variable structure grey control for a magnetic levitation system”, *IEE Proceedings-Electric Power Applications*, 153 (6): 809-814, 2006.
- [32] Zipkin, P.H., *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, 2000.
- [33] Heizer, J. ve Render, B., *Operations Management*, New York, Prentice Hall, 2001.
- [34] Ishibuchi, H. ve Tanaka, H., “Multi Objective Programming in Optimization of the Interval Objective Function”, *European Journal of Operational Research*, 48: 219-225, 1990.
- [35] Bit, A.K., Biswal, M.P. ve Alam, S.S., “Fuzzy Programming Approach to Multi-Criteria Decision Making Transformation Problem”, *Fuzzy Sets and Systems*, 50: 135-142, 1992.