



NORMAL STRESSES IN THE ELASTIC BODY WITH A LOCALLY CURVED COVERED FIBRE

Reşat KÖŞKER^{*1}, Kadriye ŞİMŞEK²

¹Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Esenler-İSTANBUL

²Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Esenler-İSTANBUL

Geliş/Received: 24.08.2006 Kabul/Accepted: 02.07.2007

ABSTRACT

In the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrically nonlinear exact equations of the theory of elasticity, the method developed for the determination of the stress distribution in the unidirectional fibrous composites with locally curved fibres is used to investigate normal stresses acting along the fibers for the case where there exists the bond covering cylinder with constant thickness between fiber and matrix materials are considered. The case for which the interaction between the fibres is not taken into account is studied. The numerous numerical results related to the stress distribution in considered body and the influence of geometrical nonlinearity to this distribution are obtained and interpreted.

Keywords: Fibrous composite, local curving, covering material, geometrical nonlinearity, normal stresses.
MSC number/numarası: 74B15, 74E10, 74D10.

YEREL EĞRİLİKLİ ÖRTÜKLÜ LİF İÇEREN ELASTİK ORTAMDAKİ NORMAL GERİLMELER

ÖZET

Yerel eğrilikli lifler içeren tek yönlü lifli kompozitlerde gerilme yayılımının belirlenmesi için, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç-boyutlu geometrik nonlineer kesin denklemleri kullanılarak geliştirilen yöntem, lif ile matris arasında sabit kalınlıklı bir sargının olması durumuna karşı gelen lif boyunca etki gösteren normal gerilmelerin araştırılmasında, lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği durum için, kullanılmıştır. Geometrik nonlineeritenin bu gerilme değerlerine etkileri incelenmiş ve bunlarla ilgili çok sayıda sayısal sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Lifli kompozitler, yerel eğrilik, sarı malzeme, geometrik nonlineerite, normal gerilmeler.

1. GİRİŞ

Tek yönlü lifli kompozit malzemeler ile ilgili yapılan çalışmalardan [1-5], sözkonusu malzemelerdeki liflerin eğriliğinin malzemenin dizaynı aşamasındaki gereksinimlerden veya teknolojik aşamalarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu malzemeler çalışılırken, dizayn gereksiniminden ortaya çıkan eğrisellikler periyodik eğrilikler, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkanlar ise yerel eğrilikler olarak modellenirler. Buradan, tek yönlü lifli kompozit malzemelerde gerilme-şekil değiştirme durumu araştırmalarında liflerin eğriliğini dikkate almanın

*Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-mail/e-ileti: kosker@yildiz.edu.tr, tel: (212) 449 17 29

teorik ve uygulama açısından önemli olduğu farkedilmektedir. Bu amaçla [6]'da, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak tek yönlü lifli kompozitlerde, yukarıda sözü edilen gerilme durumu araştırmaları için bir yöntem gösterilmiştir. Bu yöntem liflerin eğriliğinin periyodik olması durumunda uygulanmış ve buradan elde edilen sonuçlar [7]'de detaylı olarak verilmiştir.

[6]'da, lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebileceği kadar, lif yoğunluğunun düşük olduğu kabul edilmiştir. Lifler arasındaki etkileşimin incelenmesi amacı ile, bu yöntem [8]'de periyodik eğrilikli iki komşu lif olması durumuna geliştirilmiş ve ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. [9]'da ise, [6, 8] yöntemi geometrik nonlineerite durumuna geliştirilmiş ve sonsuz elastik ortamda periyodik eğrilikli tek ve iki komşu lif olması halindeki sayısal sonuçlar verilmiştir.

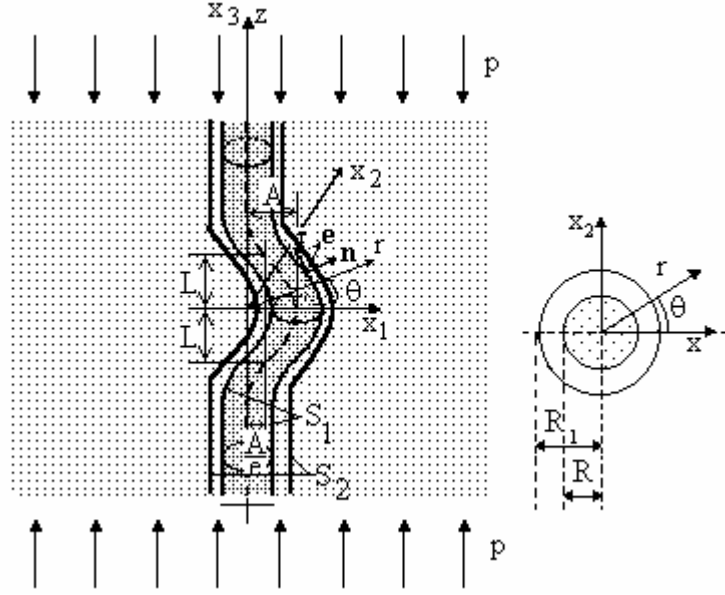
Yukarıda anılan araştırmalar, tek yönlü lifli kompozitlerdeki liflerin eğriliğinin periyodik olması ile ilgilidir. Sözü edilen malzemedeki liflerin yerel eğrilikli olması durumuna ait az sayıda çalışma vardır [10, 12]. Bu araştırmalarda ise, lineer elastisite teorisi kullanılmış ve lifler arasındaki etkileşim ihmal edilerek modelleme oluşturulmuştur. Bilinen mekaniksel düşüncelere ve [9]'da elde edilen sonuçlara göre geometrik nonlineeritenin, liflerin eğriliğinden ortaya çıkan kendi kendini dengelemiş gerilme değerlerine önemli etkisi vardır. [13]'de [10-12] yöntemi geometrik nonlineeritenin de dikkate alınması durumuna geliştirilmiş ve sayısal sonuçlar verilmiştir. Ancak, elde edilen sayısal sonuçlar, sıfırıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde kalmıştır. [15]'de ise [13]'deki yöntem lif-matris arayüzeyinde normal gerilme değerlerinin ikinci yaklaşıma kadar elde edilmesine geliştirilmiş ve geometrik nonlineeritenin, lifin yerel eğriliğinden ortaya çıkan, kendi kendini dengelemiş normal gerilmelerin yayılımına etkisini gösteren çok sayıda sayısal sonuç verilmiştir. Bu çalışmada ise, yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz ortamdaki normal gerilmeler, lif ile matris malzemeleri arasında kalınlığı sabit bir başka malzeme olması durumunda çalışılmıştır. Bu malzeme, lif ile matris malzemesi arasında bir geçiş malzemesi olabileceği gibi malzeme dizaynı gereği de yerleştirilmiş bir malzeme olabilir. Çalışmamızda, kompozit malzeme, yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisim olarak modellenmiş ve lif, lifli saran malzeme olarak isimlendireceğimiz geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan normal gerilmeler ve bu gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç sunulmuştur.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Yerel eğrilikli sarılı tek lif içeren sonsuz elastik ortam şematik olarak Şekil 1'de gösterilmiştir. Çalışmamızda, lifin yüzeyine dik kesitlerinin lif boyunca değişmeyen R yarıçaplı daire olduğunu, geçiş malzemesinin de şekilde gösterilen $R_1 - R = h$ kalınlığının lif boyunca sabit olduğunu ve cismin, sonsuzda lif yönünde (Ox_3 , (Oz) yönünde) p yoğunluklu düzgün dağılımış normal kuvvetler etkisinde olduğunu varsayacağız. Şekil 1' de gösterilen $Ox_1x_2x_3$ kartezyen, $Or\theta z$ silindirik koordinat takımlarını ele alalım ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduklarını belirtelim. İncelemelerimizi lif, geçiş malzemesi ve matrisin farklı lineer elastik malzemelerden oluştuğunu varsayıp, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlineer denklemlerini kullanarak yapalım. Lifin başlangıç küçük eğriliğini

$$x_1 = A \exp\left(-\left(\frac{x_3}{L}\right)^2\right) \cos\left(m \frac{x_3}{L}\right) = \varepsilon L \exp\left(-\left(\frac{x_3}{L}\right)^2\right) \cos\left(m \frac{x_3}{L}\right) = \varepsilon \delta(x_3); \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (1)$$

şeklinde verelim. Buradaki ε parametresi, $L > A$ kabulü ile $\varepsilon = \frac{A}{L}$ ($0 \leq \varepsilon < 1$)'dir.



Şekil 1. Malzemenin geometrik yapısı ve seçilen kordinatlar

Lif ile lifli saran malzeme ara yüzeyini S_1 , lifli saran malzeme ile matris malzemesi ara yüzeyi S_2 ile gösterirsek, bu yüzeylerin denklemlerini lif-en kesitinin sağladığı koşuldan yararlanarak

$$r_k = \left(1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta\right)^{-1} \left\{ \varepsilon \delta(t_3) + \varepsilon^3 \delta(t_3) (\delta'(t_3))^2 \sin \theta + \left[R^2 - \varepsilon^2 ((t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'(t_3))^2 (\delta'(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$z_k = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) r(t_3) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_3) \delta'(t_3), \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \quad (2)$$

şeklinde elde ederiz. Burada t_3 ($t_3 \in (-\infty, +\infty)$) bir parametredir. (2) denkleminde yararlanarak ve bazı bilinen işlemleri yaparak S_k ($k=1,2$) yüzeylerinin birim dış normallerinin bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz.

$$n_r = r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}, \quad n_\theta = \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right] [A(\theta, t_3)]^{-1},$$

$$n_z = -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}. \quad (3)$$

Burada

$$[A(\theta, t_3)] = \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right] +$$

$$\left[r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right]^2 \Bigg]^{1/2} \quad (4)$$

şeklinde dir. İleride sırası ile life ve geçiş malzemesine ait olan büyüklükleri (2), (3) ve matrisle (sonsuz elastik ortama) ait olan büyüklükleri ise (1) üst indisi ile göstereceğiz. Lif, geçiş malzemesi ve sonsuz elastik ortamda aşağıdaki alan denklemleri sağlanır.

$$\begin{aligned} \nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] &= 0, \quad 2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}, \\ \sigma_{(in)}^{(k)} &= \lambda^{(k)} e^{(k)} \delta_1^n + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}, \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(rr)}^{(k)} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k)} + \varepsilon_{(zz)}^{(k)} \end{aligned} \quad (5)$$

S_k yüzeyleri üzerinde ideal temas koşullarının sağlandığını kabul ederek ve bu koşulları

$$\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \Big|_{S_q} n_j = \sigma^{(3)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(3)j} \right) \Big|_{S_q} n_j, \quad u_j^{(k)} \Big|_{S_q} = u_j^{(3)} \Big|_{S_q}, \quad k=1,2 \quad (6)$$

biçiminde yazalım. Ele alınan durumda aşağıdaki sınır koşullarının sağlandığını varsayacağız.

$$\sigma_{zz}^{(k)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{ij}^{(k)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} 0 \quad (ij) \neq zz, \quad |x_3| \rightarrow \infty \text{ iken } |\delta(x_3)|, \left| \frac{d\delta(x_3)}{dx_3} \right| \rightarrow 0 \quad (7)$$

İleride yapılacak araştırmalarda gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleri kullanılacaktır. Bu durumda

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} H_i H_j = \sigma_{ij} \frac{1}{H_i H_j}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{H_i H_j} = \varepsilon^{ij} H_i H_j, \quad u_{(i)} = u^i H_i = u_i \frac{1}{H_i}, \quad (8)$$

formüllerinden faydalanılmaktadır. Burada $(ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta$, $(i) = r, \theta, z$ dir. σ^{ij} , ε^{ij} ve σ_{ij} , ε_{ij} gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tansörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yer değiştirme (u) vektörünün bu koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. (8) formülleri tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Bu formüllerdeki H_i 'ler ise Lamé sabitleridir. Kısalık amacıyla bundan sonra fiziksel bileşenler için parantezler kullanılmayacaktır. Yukarıda verilen formüllerde tansör notasyonu kullanılmıştır. Bu notasyon ileride de kullanılacaktır. Bunun yanında altı çizili indislere göre toplam yapılmayacaktır.

Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır. Problem, (5) denklemlerinin (6) sınır koşulları çerçevesinde çözümüne getirilmiştir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Formülasyonu yapılan problemin incelenmesi için [4]'de verilmiş olan sınır-formu pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemde göre, aranan büyüklükler, yukarıda tanımlanan ε parametresine göre seri halde aranır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q} \quad (9)$$

Ayrıca S_k ara yüzeylerinin denklemlerini oluşturan (2) ve bu yüzeylerin birim normalinin bileşenlerini gösteren (3) ifadeleri de ε 'nin serisi halinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

Normal Stresses in the Elastic Body with ...

$$\begin{aligned} r &= R + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_k(\theta, t_3), \quad z = t_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_k(\theta, t_3), \\ n_r &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(\theta, t_3), \quad n_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k d_k(\theta, t_3), \quad n_z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(\theta, t_3) \end{aligned} \quad (10)$$

bu ifadelerde yer alan ve ε^k 'ların katsayıları olan $a_k(\theta, t_3), \dots, g_k(\theta, t_3)$ 'ler (2) ve (3)'den kolaylıkla elde edilebilir. (5)'den, (9)'daki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan alan denklemleri elde edilir. Bu son ifadeleri (6)' da yerine koyar ve n_r, n_θ, n_z 'lerin (10)'daki ifadeleri kullanılırsa, bazı uzun ama bilinen işlemler sonucunda, (9)'daki her bir yaklaşım için $r = R$ 'de sağlanan temas koşulları elde edilir. Bu durumda k. temas koşuluna önceki k-1. yaklaşımların tümüne ait büyüklükler dahil olmaktadır. Şimdi sıfıncı ve birinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfıncı Yaklaşım

Sıfıncı yaklaşım için (5) denklemlerinin sağlandığı açıktır. (6) koşulları $r = R$ 'de sağlanan aynıları ile yer değiştirirler. $\nabla_n u^{(k)j,0} \ll 1$ olduğunu kabul edeceğiz. Böylece $g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0}$ terimleri δ_n^j ile yer değiştirirler. Burada δ_n^j Kronecker sembolleridir. Bu kabule göre sıfıncı yaklaşıma ait denklemler takımı

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{(k)ij,0} &= 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0}, \quad \sigma_{(in)}^{(k),0} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),0}), \\ e^{(k)} &= \varepsilon_{(rr)}^{(k),0} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),0} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),0} \end{aligned} \quad (11)$$

ve temas koşulları

$$\sigma_{(ij)}^{(k),0} \Big|_{r=R} = \sigma_{(ij)}^{(3),0} \Big|_{r=R}, \quad u_{(i)}^{(k),0} \Big|_{r=R} = u_{(i)}^{(3),0} \Big|_{r=R}, \quad k = 1, 2, \quad (ij) = rr, r\theta, rz, \quad (i) = r, \theta, z, \quad q = 1, 2 \quad (12)$$

olarak elde ederiz. Böylece, problem sıfıncı yaklaşım için, (11) denklemlerinin (12) temas koşulları çerçevesinde çözümlenmesine indirgenmiş olur.

Birinci Yaklaşım

Yukarıda ifade edilen tüm varsayımlar dikkate alınırsa birinci yaklaşım için aşağıdaki denklemler sistemi elde edilir.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,0} \right] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_j (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}), \quad (13)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s}, \quad (14)$$

Birinci yaklaşım için (13), (14)'deki altı çizili terimler sıfır olacağından, söz konusu yaklaşım için alan denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,0} \right] = 0 \quad (15)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (16)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),1} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),1} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),1} \quad (17)$$

(15)-(16) denklemlerindeki büyüklüklerin hepsi, ilgili fiziksel bileşenleri ile verilmektedir. Yukarıdaki işlemleri (6) içinde tekrarlar ve yaptığımız kabulleri dikkate alırsak birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(i)r} \right]_{3,1}^{k,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{3,0}^{k,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{3,0}^{k,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{3,0}^{k,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{3,0}^{k,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{3,0}^{k,0} = 0 \\ & \left[u_{(i)} \right]_{3,1}^{k,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{3,0}^{k,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{3,0}^{k,0} = 0, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (18)$$

Böylece birinci yaklaşıma ait denklemler ve temas koşulları çıkarılmış olmaktadır. (18) denkleminde kullanılan fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} & \left[\varphi \right]_{3,s}^{k,s} = \varphi^{(k),s} - \varphi^{(3),s}, \quad k=1,2, \\ & f_1 = \delta(t_3) \cos \theta, \quad \varphi_1 = -R \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \quad \gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2} R \right) \cos \theta, \quad \gamma_\theta = -\frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta, \\ & \gamma_z = -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Yapacağımız araştırmalar sıfırcı ve birinci yaklaşım çerçevesinde olacağından alan denklemleri ve temas koşullarının ifadelerini sözünü ettiğimiz yaklaşımlar çerçevesinde yazmış olmakla yetineceğiz. Benzer işlemlerle diğer yaklaşımlar da elde edilebilir.

Şimdi, yukarıda formülasyonu verilen sıfırcı ve birinci yaklaşımlara ait sınır-değer problemlerinin çözümlerini elde edeceğiz. Sadelik için sırasıyla lif, geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin $\nu^{(2)}$, $\nu^{(3)}$ ve $\nu^{(1)}$ Poisson oranlarının eşit olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda sıfırcı yaklaşım için aşağıdaki çözümü elde ederiz

$$\begin{aligned} & \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad \sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(3),0} = p \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \varepsilon_{zz}^{(3),0} = \varepsilon_{zz}^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}}, \quad u_r^{(1),0} = -\nu^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r, \\ & u_r^{(2),0} = -\nu^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_r^{(3),0} = -\nu^{(3)} \varepsilon_{zz}^{(3),0} r, \quad u_z^{(2),0} = u_z^{(3),0} = u_z^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z, \quad \sigma_{ij}^{(3),0} = \sigma_{ij}^{(1),0} = 0, \\ & (ij) = rr, r\theta, \theta z, rz \end{aligned} \quad (20)$$

(20)'daki $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ ve $E^{(3)}$ sırası ile matris, lif ve geçiş malzemelerinin elastisite modülleridir.

Şimdi birinci yaklaşıma ait olan (15)-(18) probleminin çözümünü ele alalım. Yukarıda yapılan kabuller ve sıfırcı yaklaşımın (20) çözümünün dikkate alınması ile (15) denklemleri

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

haline gelir. Bu denklemler, üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Benzer şekilde (16) denklemleri

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{rr}^{(k),1} = \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right), \\ & \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \end{aligned} \quad (22)$$

Normal Stresses in the Elastic Body with ...

olur. Sıfırıncı yaklaşım için elde edilen çözüm dikkate alınırsa birinci yaklaşıma ait (18) temas koşulları aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}]_{B,1}^{k,1} = 0, [\sigma_{r\theta}]_{B,1}^{k,1} = 0, [\sigma_{rz}]_{B,1}^{k,1} = (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \Big|_{(R,\theta,t_3)} \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \\ [u_r]_{B,1}^{k,1} = 0, [u_\theta]_{B,1}^{k,1} = 0, [u_z]_{B,1}^{k,1} = 0, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (23)$$

(23) denklemlerinin çözümü için (21)'i dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi [14] kullanalım.

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}; \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}; \\ u_z^{(k)} = (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \quad \Delta_1^k = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (24)$$

Buradaki $\psi^{(k)}$ ve $\chi^{(k)}$; fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_1^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi^{(k)} = 0, \quad \left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_2^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1 + \left(\xi_3^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0, \quad (25)$$

burada $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2,3$; $i=1,2,3$)'ler sabitler ve aşağıdaki şekilde belirlenirler.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}}, \quad (26)$$

Birinci yaklaşımla ilgili denklemlere ve bunları çözmek için kullanacağımız gösterilimlere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \quad (27)$$

ile verilen üstel Fourier dönüşümü uygular, ilgili sınır koşullarındaki sağ taraf fonksiyonlarını da dikkate alarak (25) ile verilen diferansiyel denklemlerin Fourier dönüşümlü hallerini çözersek, bu yaklaşımların Fourier dönüşümlerinin değerlerini belirlerken kullanacağımız $\bar{\psi}^{-(k),1}$, $\bar{\chi}^{-(k),1}$ ve $\bar{\psi}^{-(k),2}$, $\bar{\chi}^{-(k),2}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleriz.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{-(1),1} &= \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_1^{(1)} s \frac{r}{L} \right) \sin \theta \\ \bar{\chi}^{-(1),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_2^{(1)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{A}_3^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_3^{(1)} s \frac{r}{L} \right) \right] \cos \theta \\ \bar{\psi}^{-(2),1} &= \bar{A}_1^{(2)}(s) I_1 \left(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L} \right) \sin \theta, \\ \bar{\chi}^{-(2),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(2)}(s) I_1 \left(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{A}_3^{(2)}(s) I_1 \left(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L} \right) \right] \cos \theta \\ \bar{\psi}^{-(3),1} &= \left[\bar{A}_1^{(3)}(s) I_1 \left(\xi_1^{(3)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{B}_1^{(3)}(s) K_1 \left(\xi_1^{(3)} s \frac{r}{L} \right) \right] \sin \theta \\ \bar{\chi}^{-(3),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(3)}(s) I_1 \left(\xi_2^{(3)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{A}_3^{(3)}(s) I_1 \left(\xi_3^{(3)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{B}_2^{(3)}(s) K_1 \left(\xi_2^{(3)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{B}_3^{(3)}(s) K_1 \left(\xi_3^{(3)} s \frac{r}{L} \right) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (28)$$

bulunur. Burada $I_n(x)$ sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonlarıdır. (28) fonksiyonları, birinci yaklaşımın sınır-değer probleminde kullanılır ve böylece ulaşılabilecek lineer denklemler takımı çözümlerse, ulaşılmak istenen gerilmelerin birinci yaklaşımının Fourier dönüşümlü değerlerini hesaplamaya yarayacak büyüklükler belirlenmiş olur. Asıl gerilme değerlerine ulaşmak için, örneğin $\sigma_{rr}^{(1),1}$ için aşağıda verilen ters Fourier dönüşümü uygulanır.

$$\sigma_{rr}^{(1),1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} e^{isz} ds \quad (29)$$

4. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

[15]'de de olduğu gibi, birinci yaklaşımla ilgili olan lineer denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz gerilme büyüklüklerinin s Fourier parametresine bağlı Fourier Dönüşümlü değerleri bulunmuş olur. Gerçek değerlere ulaşmamız için kullanmamız gereken Ters Fourier Dönüşümündeki $\int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) ds$ integral, büyüklüklerin tek veya çift olmalarından dolayı $\int_0^{+\infty} (\cdot) ds$ haline gelmiş olur. Bu integral

$$\int_0^{+\infty} (\cdot) ds \cong \int_0^{S^*} (\cdot) ds = \sum_{i=0}^N \int_{S_i}^{S_{i+1}} (\cdot) ds \quad (30)$$

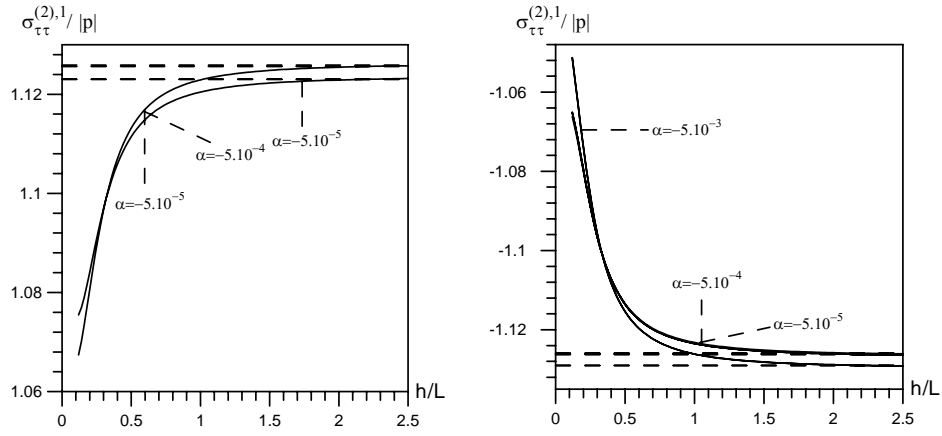
yaklaşımıyla çözülmüştür. N ve S_* değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş parametreler olmak üzere $S_0 = 0$, $S_N = S_*$, olarak kullanılmıştır. Ayrıca $\int_{S_i}^{S_{i+1}} (\cdot) ds$ integralinin sayısal hesabı için 10 noktalı Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır Sayısal hesaplar için gerekli algoritmalar ve bunların FTN 77 programlama diliyle kodlaması tarafımızdan geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

Burada vereceğimiz sayısal sonuçlar $\sigma_{\tau\tau}$ normal gerilmelere ait ve sıfırıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde elde edilen sonuçlar olacaktır. Bu gerilmeler, lif, lifi saran malzeme ve matris arakesit yüzeyleri olan S_k ($k=1,2$) yüzeylerinin τ_k teğet vektörleri doğrultusunda, lifin eksenine dik kesitlerinin S_k yüzeyleri üzerindeki noktalarında etki gösteren normal gerilmelerdir. Yerel eğriliğin ihmal edilmesi durumuna karşılık gelen $\varepsilon=0$ halinde $\sigma_{\tau\tau}$ gerilmeleri σ_{zz} ile çakışır.

Sayısal sonuçlar için $\kappa = R/L$ ve h/L parametrelerini tanımlayalım. Verilen sayısal sonuçlar $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu^{(3)} = 0.3$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta = 0$ ve $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ değerleri kullanılarak elde edilmiştir. Geometrik nonlineeritenin gerilme yayılımına etkisini göstermek için $\alpha = p/E^{(1)}$ parametresi kullanılmıştır. Ayrıca, yer darlığından dolayı, τ teğet vektörü doğrultusundaki $\sigma_{\tau\tau}$ normal gerilmeleri ile ilgili sayısal sonuçlar, ilgili ara yüzeyin yalnız bir malzeme üzerindeki değerleri hesaplanarak verilmiştir. Örneğin, $\sigma_{\tau\tau}^{(2),1}/|p|$ lif ile geçiş malzemeleri ara yüzeyi üzerindeki lif yönündeki değerleri gösterirken, $\sigma_{\tau\tau}^{(3),1}/|p|$ ise geçiş malzemesi ve matris ara yüzeyi üzerindeki geçiş malzemesi yönündeki değerleri ifade etmektedir.

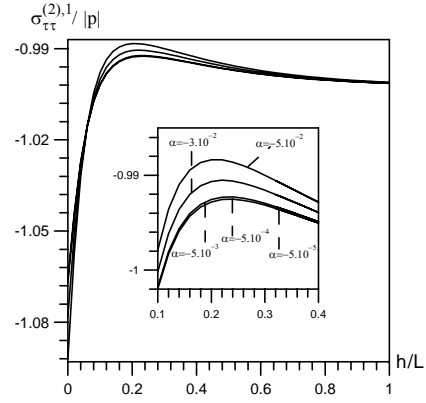
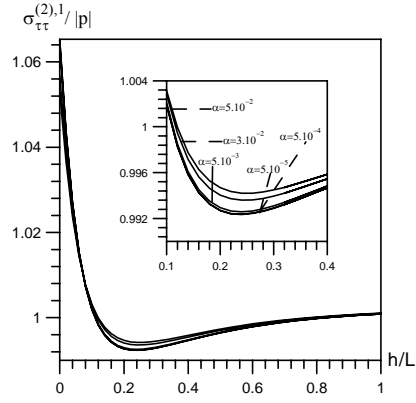
Şekil 2'de $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 1.0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 1/40$ ve $m = 1$ değerlerinde, çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2),1}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılığın tek lif durumuna yakınsaması görülmektedir. Bu şekilde, kesikli çizgiler ile gösterilen doğrular, aynı parametre değerlerinde sonsuz elastik ortamda sarılı olmayan yerel eğrilikli tek lif olması probleminde elde edilenleri [15]

göstermektedir. Buradan, geçiş malzemesinin kalınlığının artırılması ile aynı parametre değerlerinde malzemenin sarılı olmayan yerel eğrilikli tek lif içermesi durumunda elde edilenlere ulaşıldığı gözlenmektedir.

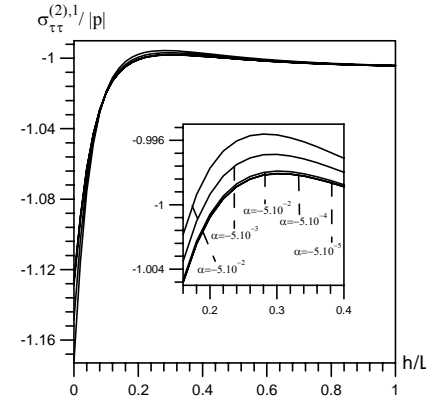
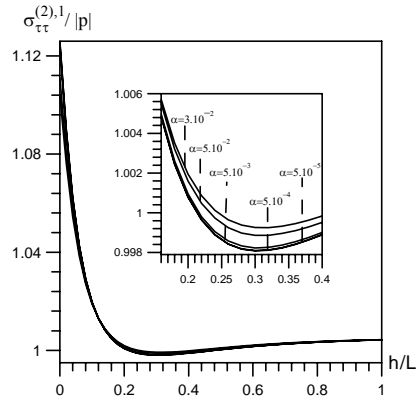


Şekil 2. $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 1.0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 1/40$ ve $m = 1$ değerlerinde, çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2),1}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılığın tek lif durumuna yakınsaması

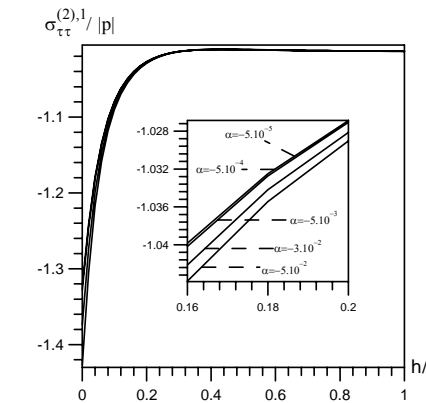
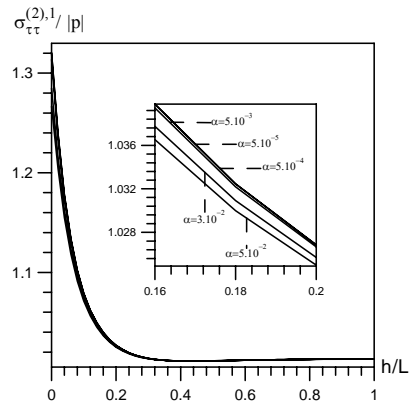
Şekil 3 ve 4'de ise $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 1.0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 40$ değerlerinde $m = 1, 2, 3$ için sırası ile $\sigma_{\tau\tau}^{(2),1}/|p|$ ve $\sigma_{\tau\tau}^{(3),1}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ve geometrik nonlineariteyi gösteren α 'nın buna etkisi gösterilmiştir. Beklendiği gibi, $h/L = 0$ değerinde elde edilen sayısal sonuçların sarılı olmayan tek lif problemi için elde edilenlerle [15] çakıştığı gözlenmektedir. Yine aynı şekillerden, m parametresinin değerleri büyüdükçe ara yüzeylerdeki normal gerilme değerlerinin de mutlak değer olarak büyüdüğü ve geometrik nonlinearitenin etkisi olarak, $|\alpha|$ büyüdükçe her iki temas yüzeylerinde de normal gerilme değerlerinin çekme durumunda mutlak olarak arttığı, basınç durumunda mutlak olarak azaldığı izlenmektedir. Basınç durumunda, α değerlerinin, ilgili stabilite kaybı değerlerinden [2] küçük alındığını belirtelim.



(a)



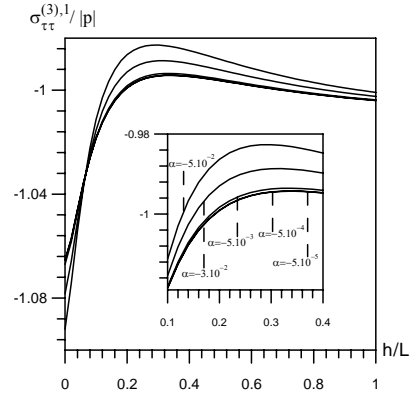
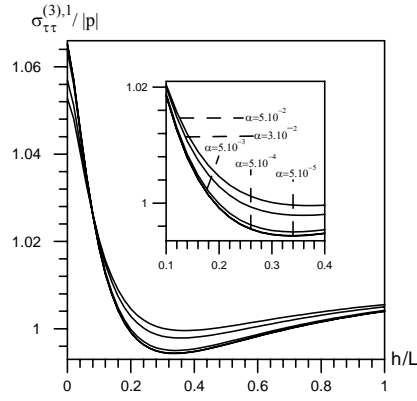
(b)



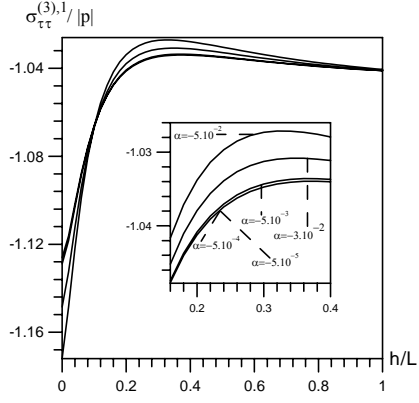
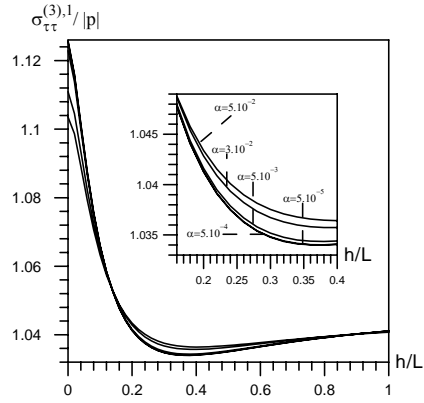
(c)

Şekil 3 $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 1.0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 40$ değerinde, çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2),1}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 3$

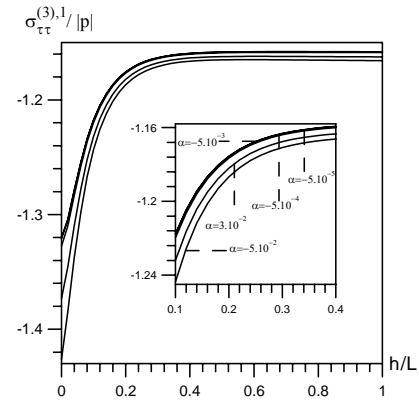
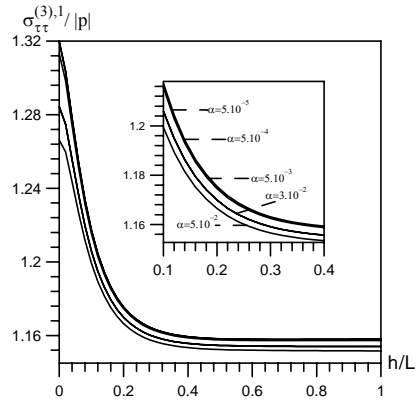
Normal Stresses in the Elastic Body with ...



(a)



(b)



(c)

Şekil 4 $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 1.0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 40$ değerinde, çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(3),1}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 3$

Çizelge 1 ve 2’de $x_3/L=1.0$, $\kappa=0.1$, $h/L=0.2$ için sırası ile $\sigma_{rr}^{(2),1}/|p|$ ve $\sigma_{rr}^{(3),1}/|p|$ normal gerilmelerinin çeşitli α , $E^{(3)}/E^{(1)}$ ve m ’lerde değerleri verilmiştir. Buradan da m parametresi ile gerilme değerlerinin arttığı ve $E^{(3)}/E^{(1)}$ değeri arttıkça, basınç ve çekme durumlarında $\sigma_{rr}^{(2),1}/|p|$ değerleri mutlak olarak azalırken $\sigma_{rr}^{(3),1}/|p|$ değerlerinin mutlak olarak arttığı izlenmektedir.

Çizelge 1. $x_3/L=1.0$, $\kappa=0.1$, $h/L=0.2$ için $\sigma_{rr}^{(2),1}/|p|$ ’nin çeşitli α , $E^{(3)}/E^{(1)}$ ve m ’lerde değerleri

m	$\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$	$\alpha = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1.023	1.023	1.021	1.020	-1.022	-1.023	-1.026	-1.028
	20	1.021	1.021	1.019	1.018	-1.020	-1.022	-1.025	-1.027
	30	1.020	1.020	1.018	1.017	-1.019	-1.021	-1.024	-1.027
	40	1.019	1.019	1.017	1.016	-1.018	-1.020	-1.023	-1.026
1	10	1.042	1.043	1.039	1.038	-1.042	-1.043	-1.047	-1.051
	20	1.039	1.040	1.037	1.035	-1.039	-1.041	-1.046	-1.050
	30	1.038	1.038	1.034	1.032	-1.038	-1.039	-1.045	-1.050
	40	1.036	1.036	1.033	1.030	-1.036	-1.038	-1.044	-1.049
3	10	1.103	1.103	1.096	1.092	-1.103	-1.105	-1.114	-1.126
	20	1.100	1.099	1.092	1.087	-1.100	-1.103	-1.113	-1.126
	30	1.097	1.097	1.089	1.084	-1.098	-1.100	-1.112	-1.124
	40	1.095	1.094	1.086	1.080	-1.095	-1.098	-1.111	-1.123

Çizelge 2. $x_3/L=1.0$, $\kappa=0.1$, $h/L=0.2$ için $\sigma_{rr}^{(3),1}/|p|$ ’nin çeşitli α , $E^{(3)}/E^{(1)}$ ve m ’lerde değerleri

m	$\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$	$\alpha = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1.049	1.051	1.047	1.045	-1.047	-1.052	-1.057	-1.062
	20	1.057	1.057	1.052	1.049	-1.056	-1.059	-1.067	-1.074
	30	1.061	1.061	1.055	1.051	-1.060	-1.063	-1.072	-1.082
	40	1.064	1.063	1.056	1.052	-1.063	-1.066	-1.076	-1.088
1	10	1.091	1.094	1.088	1.084	-1.091	-1.097	-1.105	-1.114
	20	1.107	1.108	1.099	1.094	-1.107	-1.112	-1.124	-1.137
	30	1.116	1.115	1.105	1.099	-1.116	-1.120	-1.135	-1.152
	40	1.121	1.120	1.109	1.102	-1.121	-1.125	-1.143	-1.164
3	10	1.234	1.237	1.222	1.212	-1.234	-1.243	-1.264	-1.285
	20	1.273	1.272	1.252	1.239	-1.274	-1.281	-1.310	-1.342
	30	1.295	1.291	1.267	1.252	-1.295	-1.303	-1.339	-1.378
	40	1.309	1.304	1.278	1.261	-1.309	-1.317	-1.359	-1.406

KAYNAKLAR

- [1] Tarnopolsky Yu.M., Jigun I.G. and Polyakov V.A., “Spatially-reinforced composite materials”, Handbook, Mashinostroyeniya, Moscow, 1987 (in Russian).
- [2] Guz A.N., “Failure mechanics of composite materials in compression”. –Kiev: Naukova Dumka, 1990. –630 p. (in Russian.)
- [3] Kelly A., “Composite Materials: impediments do wider use and some suggestions to overcome these”, In Proceeding Book ECCM-8, 3-6 June 1998, Naples-Italy, Vol.I, 15-18.
- [4] Akbarov, S.D. and Guz, A.N., “Mechanics of Curved Composites”,-Kluwer Academic Publishers, 2000-464p.
- [5] Guz A.N., “On one two-level model in the mesomechanics of compression fracture of Cracked Composites”, Int. Appl. Mech., 2003, 39, N0:3, 274-285.
- [6] Akbarov, S.D. and Guz, A.N. “Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites With Curved Structures”, Soviet Applied Mechanics, -1985-March-p.777-785.
- [7] Akbarov, S.D. and Guz, A.N., “Mechanics of curved composites (piecewise homogenous body model)”, Int. Appl. Mech., 2002, 38, N0:12, 1415-1439.
- [8] Kosker R. and Akbarov, S.D., “Influence of the interaction between two neighbouring periodically curved fibers on the stress distribution in a composite material”, Mechanics of Composite Materials, 2003, Vol.39, No. 2, 165-176.
- [9] Akbarov, S.D. and Kosker R., “On a stress analysis in the infinite elastic body with two neighbouring curved fibers”, Composites Part B: Engineering, 2003, 34/2, 2003, 143-150.
- [10] Djafarova E.K., “On the solution method of the stress-strain state problems in the fibrous composites with locally curving structures”, Tr. Nauch. Konf. Molod. Uchyon. In-ta Mekhan. AN Ukr., Kiew, 1992.-Part I. –p.39-44 (in Russian).
- [11] Djafarova E.K., “Distribution of self-equilibrated stresses in fibrous composite materials with local curving in the structures”, Dep. In VINITI, N 2166-B94, 07.09.1994. –34p (in Russian).
- [12] Djafarova E.K., “Stress state in composite materials with local curving fibers”, Dissertation for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Inst. Methem. And Mekhan. AN Azerb. Republ. Baku, 1995. –110p. (in Russian).
- [13] S. D. Akbarov, R.Kosker and K. Simsek, “Stress Distribution In An Infinite Elastic Body With A Locally Curved Fiber In A Geometrically Nonlinear Statement” Mechanics of Composite Materials, 41 (4): 291-302, July, 2005.
- [14] Guz, A.N. “Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies”, -Springer, 1999-555p.
- [15] Köşker, R ve Şimşek, K., “Geometrik Nonlineerite Durumunda Yerel Eğrilikli Lif İçeren Elastik Ortamdaki Normal Gerilmeler Hakkında”, Sigma Mühendislik Ve Fen Bilimleri Dergisi, 2006 (basımda).